جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج




سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإعدادية

# الرياضيات

## للصف الرابع العلمي

المؤلفون

أ. د. صلاح حمزة عبد
م. م. مروة فليح حسن
ميسلون عباس حسن

أ. م. د. ليث عبد اللطيف مجيد
م. د. حسين صادق كاظم
عبد الله عمر هندي

الطبعة الأولى

١٤٤٧هـ / ٢٠٢٦ م

بُنِيتْ وصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرّياضيّاتِ للمرحلةِ الإعداديةِ) على أيـــدي فريقٍ من المتخصّصين في وزارةِ التّربيةِ/المديريةُ العامةُ للمناهـجِ وبمشاركةِ متخَصّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التّعليمِ العالي والبحثِ العلمي على وفقِ المعاييرِ العالميةِ لِتُحقِّقَ أهدافَ بناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثِّلةِ في جعلِ الطّلابِ:

- مُتعلِّميـنَ ناجحيـــنَ مـــدى الحيـــاةِ.
- أفـــــراداً واثقيـــــنَ بأنفُسِهـــم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشعُرونَ بالفَخرِ.

المشرفُ العلميُّ على الطّبع
م. م. مروة فليح حسن
الخَبيرُ اللّغويُّ
د. ندى رحيم حسين

المشرفُ الفنيُّ على الطّبع
تيسير عبد الإله إبراهيم
مُصمِّمُ الكتاب
تيسير عبد الإله إبراهيم

الغلافُ والرّسومُ الهندسيّةُ
فراس عبدالهادي محمد

# المقدمة

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنَ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليمية اللازمةِ لهُ، لتنميةِ قُدراتهِ على التفكيرِ وَحلّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمنْ مُنطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليهِ وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهج بصورةٍ عامة ولاسيّما مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةَ والتكنولوجيةَ في مجالاتِ الحياةِ المختلفة، فَقدْ وُضِعت خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأُنجزتْ منها سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ للمرحتين الابتدائية والمتوسطةِ وَبَدأ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كتبِ المرحلةِ الإعداديةِ.

إنّ سلسلةَ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمن الإطارِ العام للمناهج تُعززُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأي والرأي الآخر والعدالةِ الاجتماعية، وتوفيرِ فرصٍ متكافئةٍ للتميزِ والإبداع، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعية وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنيَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محوريةِ الطالب في عمليتَي التعليمِ والتعَلُّمِ وَعَدُّه المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ الاعداديةِ في تنظيمِ الدروسِ على اربع فقراتٍ: تعَلَّمْ ، تدرّبْ وَحِلّ اختيار من متعدد ، تدرّبْ وَحِلّ التمرينات ، تدرّبْ وحِلّ مسائلَ حياتيةً.

يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الرّابعِ العلميّ مشتملاً على أربعة محاور أساسية: محورُ الأعدادِ والعملياتِ ، ومحورُ الجبرِ ، ومحور الهندسة والقياسِ ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضِمن الأوزان النسبية لكل محور، وتضَمَّنَ الكتابُ خمسةَ فصول وكلّ فصلٍ تضمّنَ عدّةَ دروسٍ، ولكلِّ درسٍ تمريناته.

تتميّزُ هذهِ الكتبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبَ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريق ما تُقدِمهُ من تدريباتٍ وتمريناتٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلك وُضِعَت تمريناتُ لكلِّ فصل وهي تخْتلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلك لكونِها موضوعية فالإجابة عنها تكون عن طريق اختيارٍ من متعدّدٍ وهذا بدورهِ يهيِّئ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ المطوّرةِ للمرحلةِ المتوسطةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرّسِ، وعليه نأملُ أنْ يُسْهِمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطّلابِ المهاراتِ العلميةَ والعمليةَ وَتنميةِ ميولِهم لدراسةِ الرياضيات.

اللّهمّ وفّقْنا لخدمةِ عراقِنا العزيزِ وأبنائِهِ ...

**المؤلفون**

الفصلُ 1

# الدوال الحقيقية والمتباينات

# Real Functions and Inequalities


الدرس [1-1] الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية

الدرس [1-2] المتباينات

الدرس [1-3] الدوال الحقيقية الرئيسة (الأم)

الدرس [1-4] الدالة التربيعية والدالة التكعيبية

الدرس [1-5] الدالة المطلقة




للدوال تطبيقات كثيرة في حياتنا اليومية ومنها أن المخطط البياني لقفزات الدلافين فوق سطح ماء البحر يمثل إحدى التحويلات الهندسية للدالة التربيعية الأم $f(x) = x^2$.

# الاختبارُ القبليّ Pretest

**بسِّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:**

1 $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)$ 2 $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ 3 $\sqrt{12}(\sqrt{3} - \sqrt{8}) - 6$

**إذا كان $f:N\to N$ و $g:N\to N$ حيث أن $f(x)=2x+1$ , $g(x)=x^2$ ، جد ما يأتي:**

4 $(fog)(3)$ 5 $(gof)(3)$ 6 $(fog)(x)=33$ ماقيمةxاذاكان

**جد مجموعة حل المتباينات التالية:**

7 $x-5 \geq 5$ 8 $-3 \leq 3x + 2 < 9$ 9 $x + 3 > 2$ أو $x + 3 \leq -2$

**جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:**

10 $(x-1)(x+1)$ 11 $3x\,(x^2+2)$ 12 $\frac{2}{3}(x^2 - 5)(x+2)$

**حللّ المقادير الجبرية التالية:**

13 $x^2+3x-4$ 14 $x^3+2x^2+x$ 15 $9x^2-90x+81$

**حل المعادلات التالية:**

16 $4\sqrt{x} - 36 = 0$ 17 $16x^2-49=0$ 18 $x-20=|-5|$

**اكتب قاعدة اقتران التطبيق ومثِّله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى :**

19 $f = \{ (1 , 0) , (2 , 0) , (3 , 0) , (4 , 0) \}$

20 $g = \{ (0 , 0) , (1 , -1) , (2 , -2) , (3 , -3) \}$

# الدرسُ [1-1]

## الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية
## Real Numbers and Real Intervals

**فكرة الدرس**

- التعرف الى مفهوم المالانهاية.
- التعرف الى الفترات الحقيقية المحدودة وغير المحدودة وتمثيلها على مستقيم الاعداد.

**المفردات**

- المالانهاية
- الفترة المفتوحة
- الفترة المغلقة
- الفترة نصف المفتوحة (نصف المغلقة)

**تعلم**



اكتشف علماء الفلك نجماً فائق السرعة يسير بسرعة ستة ملايين كيلو متر في الساعة. حاول أن تفكر مع هذه السرعة الفائقة لهذا النجم هل هناك نهاية لرحلة هذا النجم في هذا الفضاء الشاسع؟

### [1-1-1] مفهوم الأعداد الحقيقية والمالانهاية
### Concept of Real Numbers and Infinity

تعلمت سابقا ان اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية والجدول التالي يوضح أهم خصائص الأعداد الحقيقية: فإذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية.

| الخاصية | الجمع | الضرب |
|---|---|---|
| الانغلاق | لكل $a,b\in R$ فإن $(a+b)\in R$ عدد حقيقي | لكل $a,b\in R$ فإن $(a\times b)$ عدد حقيقي |
| التجميعية | $a+(b+c)=(a+b)+c$ | $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ |
| العنصر المحايد | $a+0=a=0+a$ | $a\times 1=a=1\times a$ |
| النظير | $a+(-a)=0=(-a)+a$ | $a\neq 0\ ,\ a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times a$ |
| التبديلية | $a+b=b+a$ | $a\times b=b\times a$ |
| التوزيع | $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ , | $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$ |

**مثال (1)** بسِّط العبارات التالية باستعمال الخواص وترتيب العمليات:

i) $5(3x-4y)-\frac{1}{2}(6x-2y)=15x-20y-3x+y$ — خاصية التوزيع

$=(15x-3x)+(-20y+y)=12x-19y$ — خاصية التبديل، خاصية التجميع

ii) $(3x+4)(x-2)=3x(x-2)+4(x-2)$ — خاصية التوزيع

$=3x^2-6x+4x-8=3x^2-(6x-4x)-8$ — خاصية التوزيع ، خاصية التجميع

$=3x^2-2x-8$

iii) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times 1$ — خاصية العنصر المحايد لعملية الضرب

$=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$ — خاصية التوزيع

## [1-1-2] الفترات وتمثيلها — Intervals and Their Representation

**الفترة:** وهي مجموعة كل الاعداد الحقيقية الواقعة بين عددين أو محددة بهما. حيث يعبر عن الفترة بقوسين يوضع داخلهما العددين a,b الأصغر(a) يمثل بداية الفترة والاكبر (b) يمثل نهاية الفترة ويمكن كتابة الفترة على شكل مجموعة بالصفة المميزة وتمثيلها على مستقيم الأعداد الحقيقية الذي يمتد من سالب ما لانهاية (-∞) الى موجب ما لانهاية (∞) وتصنف الفترات الى نوعين:

### أولاً: الفترات المحددة: bounded intervals

**1- الفترة المفتوحة:** $(a,b)=\{x \in R\ ;\ a < x < b\}$ وهي مجموعة الأعداد التي تقع بين العددين a , b

وان $a,b \notin (a,b)$ .

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**2- الفترة المغلقة:** $[a,b]=\{x \in R\ ,\ a \le x \le b\}$ وهي مجموعة الاعداد تبدأ بالعدد a وتنتهي بالعدد b

وأن $a,b \in [a,b]$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**3- الفترة نصف مغلقة ( نصف المفتوحة )** $[a,b)=\{x \in R, a \le x < b\}$ حيث أن العدد a ينتمي للفترة $a \in [a,b)$ ، بينما العدد b لاينتمي للفترة $b \notin [a,b)$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**4- الفترة نصف مغلقة (نصف مفتوحة)** $(a,b]=\{x \in R, a < x \le b\}$،حيث أن العدد a لا تنتمي للفترة $a \notin (a,b]$ ، بينما العدد b ينتمي للفترة $b \in (a,b]$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




### ثانياً: الفترات غير المحددة: Unbounded intervals

**1- الفترة مفتوحة من اليسار وغير محددة من اليمين:** $(a,\infty)=\{x \in R: x > a\}$

وان $a \notin (a,\infty)$ وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**2- الفترة مفتوحة من اليمين وغير محددة من اليسار:** $(-\infty , b)=\{x \in R: x < b\}$

وأن $b \notin (a,b)$

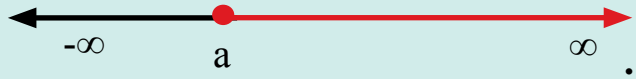
وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**3- الفترة مغلقة من اليسار وغير محددة من اليمين:** $[a,\infty)=\{x \in R\ ,\ x \ge a\}$

وأن $a \in [a,\infty)$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو




**4 - الفترة مغلقة من اليمين وغير محددة من اليسار:**

$(-\infty, b]=\{x \in R\ ,\ x \le b\}$

وأن $b \in (-\infty, b]$

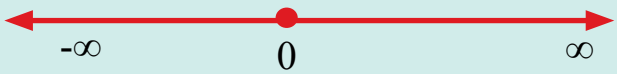
وتمثيلهاعلى مستقيم الأعداد هو




**5- الفترة مفتوحة وغير محددة من اليمين واليسار:** $R=(-\infty,\infty)$

وهي مجموعة الاعداد الحقيقية

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



**مثال (2)** أكتب نوع الفترة والصفة المميزة للمجموعة والتمثيل البياني لكل فترة مما يأتي:

i) [4,7]  ii) (-2,5]  iii) (11,15)  iv) [-10,2)

| الفترة | نوع الفترة | التمثيل البياني | الصفة المميزة للمجموعة |
|---|---|---|---|
| [4,7] | مغلقة |   | $\{x \in R : 4 \le x \le 7\}$ |
| (-2,5] | نصف مفتوحة(نصف مغلقة) |   | $\{x \in R : -2 < x \le 5\}$ |
| (11,15) | مفتوحة |   | $\{x \in R : 11 < x < 15\}$ |
| [-10,2) | نصف مغلقة(نصف مفتوحة) |   | $\{x \in R : -10 \le x < 2\}$ |

**مثال (3)** اكتب الفترات بصيغة الصفة المميزة للمجموعة ومثّلها بيانياً:

i) $(-\infty,3)$  ii) $[5,\infty)$  iii) $(-\infty,\infty)$

**استنتاج:**
فترة جميع الأعداد الحقيقية:
$R=(-\infty,\infty)$
وهي فترة مفتوحة

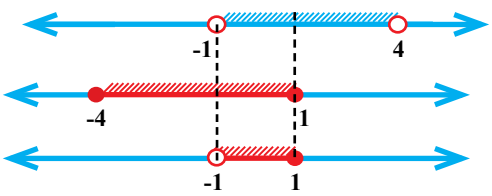
| الفترة | تمثيلها بشكل المجموعة | تمثيلها بيانياً |
|---|---|---|
| $(-\infty, 3)$ | $\{x \in R: x < 3\}$ |   |
| $[5, \infty)$ | $\{x \in R: x \ge 5\}$ |   |
| $(-\infty, \infty)$ | $\{x \in R: -\infty < x < \infty\}$ |   |

## [1-1-3] العمليات على الفترات — Operations On Intervals

تعلمت سابقا كيفية إجراء العمليات على المجموعات وبما ان الفترة هي مجموعة وبالتالي فإن العمليات على المجموعة ممكن تطبيقها على الفترات أيضاً.

**مثال (4)** عبّر عن تقاطع واتحاد الفترتين $[-4,1]$ و $(-1,4)$ على مستقيم الأعداد على صورة فترة، وأيضاً على صورة مجموعة.

$[-4,1] \cap (-1,4)$: على مستقيم الأعداد

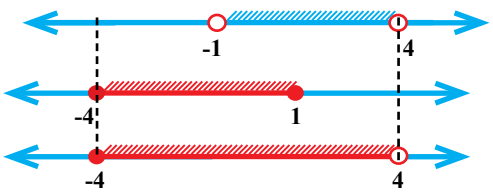



**i) نلاحظ التقاطع**

على صورة فترة $(-1,4) \cap [-4,1] = (-1,1]$

على صورة مجموعة $(-1,1] = \{x \in R: -1 < x \le 1\}$

**ii) نلاحظ الاتحاد**



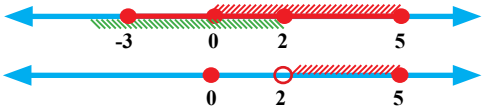

على صورة فترة $(-1,4) \cup [-4,1] = [-4,4)$

على صورة مجموعة $\{x \in R: -4 \le x < 4\} = [-4,4)$

**أضف إلى معلوماتك:**
**أي فترة $A \cap \varnothing = \varnothing$**
**أي فترة $A \cap R = A$**
**حيث ان $\varnothing$ يمثل رمز مجموعة خالية**

**مثال (5)** لتكن $A = [0,5]$ و $B = [-3,2]$ جد A-B، $A^c$ :

باستخدام مستقيم الأعداد نجد ان مجموعة A-B هي كل الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى مجموعة A ولا تنتمي إلى مجموعة B وتسمى مجموعة الفرق




**(i** $A-B = [0,5] - [-3,2] = (2,5]$

نلاحظ ان $A^c$ هي مجموعة جميع عناصر المجموعة الشاملة U التي لا تنتمي إلى المجموعة A ويرمز لها بالرمز A، والمجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات الأخرى ويرمز لها بالرمز U




**(ii** $A^c = R - [0,5] = (-\infty,0) \cup (5,\infty)$

**لاحظ ان** $\emptyset^c = R$ ، $A^c$ هي المجموعة المتممة الى مجموعة A في الاعداد الحقيقية

$R^c = \emptyset$ ، A-B هي مجموعة الفرق بين مجموعة A ومجموعة B

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابةَ الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) $2 \in$ ....

(a) (1,2) (b) (2,5] (c) [2,3) (d) (-1,2)

2) $R^+ \cap [-3,3] =$

(a) (0,3] (b) [0,3] (c) [0,3) (d) (0,3)

3) $[2,5] \cup [4,6]$

(a) (2,6) (b) (2,6] (c) [2,6) (d) [2,6]

4) $\sqrt{3} \in$ ....

(a) [0,1] (b) (2,3) (c) (1,2) (d) [3,5)

## التمرينات

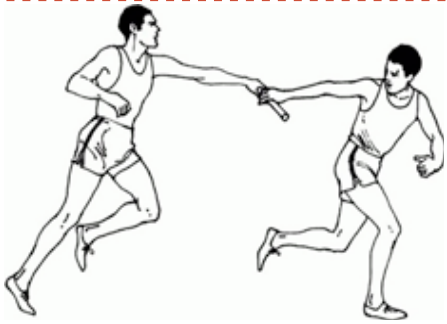
**بسّط الجمل العددية التالية:**

5) $\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ 6) $\sqrt{8}(1-\sqrt{2})$ 7) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{27})$ 8) $6(\sqrt{125}+2\sqrt{5}-4\sqrt{5})$

**جد ما يلي باستعمال مستقيم الأعداد:**

9) $[-1,4] \cup [2,3]$ 10) $[0,1] \cap [-2,4]$ 11) $[4,6]^c$ 12) $(9,\infty)^c$ 13) $[4,6)^c$

## مسائلُ حياتيةٌ





14) سباق بريد 400 م يستلم أحدهما من الآخر على التتابع فإذا استلم العداء الثاني من العداء الأول قبل مترين من مسافة العداء الأول، اكتب على شكل فترات كُلاً من:

i) المسافة التي قطعها العداءان معاً.

ii) ما المسافة التي اشترك كِلا العدائين في قطعها؟

15) في امتحان مادة الرياضيات استطاع أحمد أن ينهي الامتحان خلال 150 دقيقةً، أما مهند الذي وصل متأخراً بـ 15 دقيقةً أنهى الامتحان حتى انتهاء وقت الامتحان الذي مدته 180 دقيقةً:

i) احسب فترة تقاطع فترتي امتحان الطالبين.

ii) احسب فترة اتحاد فترتي امتحان الطالبين.

# الدرسُ [1-2] المتباينات Inequalities

**فكرة الدرس**

إيجاد مجموعة حل المتباينات من الدرجة الاولى والدرجة الثانية والقيمة المطلقة باستعمال الفترات الحقيقية.

**المفردات**

المتباينة

القانون العام (الدستور)

القيمة المطلقة

**تعلم**

شركة الغزل والنسيج في الكاظمية أحد أهم معامل النسيج في العراق، استطاعت الشركة من بيع 85 لفافة من القماش خلال الأسابيع الثلاثة الأولى من الشهر. كم على الشركة أن تبيع في الأسبوع الأخير لتصل مبيعاتها على الأقل 120 لفافة في ذلك الشهر؟



## [1-2-1] تمثيل مجموعة حل المتباينات من الدرجة الأولى باستعمال الفترات الحقيقية
## Representing the Solution set of first Degree Inequalities using Real Intervals

تعلمت سابقا أن علاقات التباين هي $\leq, <, \geq, >$ تدعى الجمل الجبرية التي تستخدم هذه الرموز بالمتباينات، وتسمى المتباينة التي تحوي على المتغير x ومعرّفة بالشكل $ax + b < 0$ حيث a و b أعداد حقيقية و $a \neq 0$ بمتباينات من الدرجة الأولى ويمكن تمثيل هذه المتباينات باستخدام الفترات الحقيقية.

**لاحظ:** يمكن استبدال $<$ في تعريف المتباينة بأي علاقة من علاقات التباين أعلاه.

**مثال (1)**

في فقرة تعلم،

ليكن x عدد لفافات القماش المباعة في الأسبوع الأخير

وحيث ان المبيعات يجب أن تصل على الأقل 120

فالمتباينة ستكون بالشكل التالي $x + 85 \geq 120$

بطرح 85 من الطرفين $x \geq 35$

إذن مجموعة حلول المتباينة باستخدام الفترات الحقيقية ستكون $S = [35,\infty)$

لذا يجب ان تبيع الشركة 35 لفة قماش أو اكثر .

**مثال (2)**

عبر عن قيم x لكل مما يأتي بدلالة الفترات :

1) $x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty,1]$

2) $-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-2,3]$

3) $6 < x < 9 \Rightarrow x \in (6,9)$

**مثال (3)**

حل المتباينة التالية ومثل الحل بالفترات الحقيقية. $x - 8 < -2$

بإضافة النظير الجمعي للعدد 8- لطرفي المتباينة

$\Rightarrow x - 8 + 8 < -2 + 8$

$\Rightarrow x < 6$




إذن الفترة التي تمثل حل المتباينة هي $x \in (-\infty,6)$

## [1-2-2] حل المتباينات التربيعية من( الدرجة الثانية )باستعمال الإشارات:
## Solving Quadratic Inequalities from the second Degree by Signs

المتباينة التربيعية بالصيغة العامة تأخذ احدى الصور التالية:

i) $ax^2+bx+c \leq 0$ or $ax^2+bx+c < 0$ , $\forall\, a, b, c \in R, a \neq 0$

ii) $ax^2+bx+c \geq 0$ or $ax^2+bx+c > 0$ , $\forall\, a, b, c \in R, a \neq 0$

**ولحل هذه المتباينة فإننا نتبع الخطوات التالية :**

**أولاً :** نجد حل للمعادلة من الدرجة الثانية المرافقة للمتباينة ونحدد جذورها بحلها باحدى الطرق السابقة .

**ثانياً :** نعين جذور المعادلة التربيعية على مستقيم الأعداد بتحديد الفترات السالبة والموجبة على مستقيم الأعداد.

**ثالثاً :** نحدد الفترات التي تحقق المتباينة باستعمال تقاطع (ضرب) اشارات الفترات ونجد مجموعة الحل للمتباينة واذا كانت المتباينة تتضمن علاقة ( $<$ ، $\leq$ ) فإن فترة الحل تكون فترة واحدة ، إما إذا كانت تحتوي العلاقة ( $>$ ، $\geq$ ) فإن فترة الحل تكون من اتحاد فترتين منفصلتين .

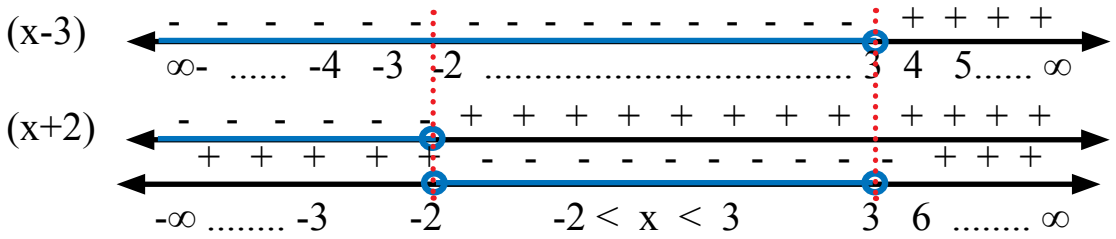
**مثال (4)** جد مجموعة الحل للمتباينة التربيعية التالية باستعمال الأشارات :

$x^2 - x - 6 < 0$

**الخطوة الاولى :** نجد حل المعادلة المرافقة من الدرجة الثانية باستعمال التحليل بالتجربة .

$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{or } x = -2$

**الخطوة الثانية :** نعين جذور المعادلة على مستقيم الأعداد ونضع اشارات الأقواس .



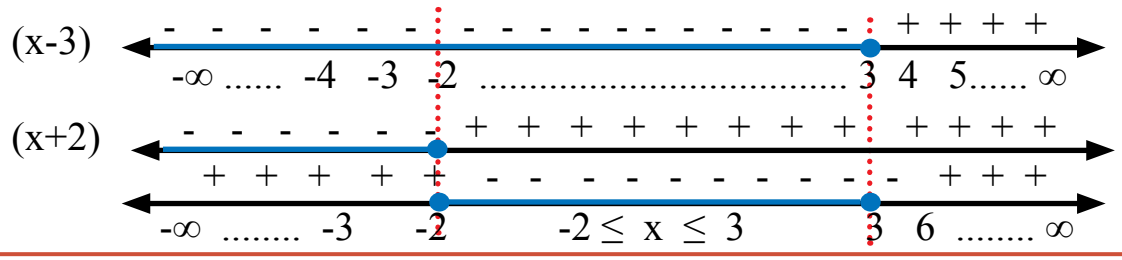

**الخطوة الثالثة :** نقاطع إشارات الفترات للحصول على مجموعة الحل التي تحقق المتباينة وهي

$s = (-2, 3)$

**مثال (5)** جد مجموعة الحلّ للمتباينة التالية باستعمال الأشارات:

$x^2 - x - 6 \leq 0$

ملاحظة : نتبع الخطوات السابقة في حل المثال (4) والفرق هنا نلاحظه بان مجموعة الحل سوف تكون فترة مغلقة $s = [-2,3]$ وذلك لان العلاقة هي أصغر من أو يساوي



**مثال (6)** جد مجموعة الحل للمتباينة التربيعية التالية باستعمال الأشارات :

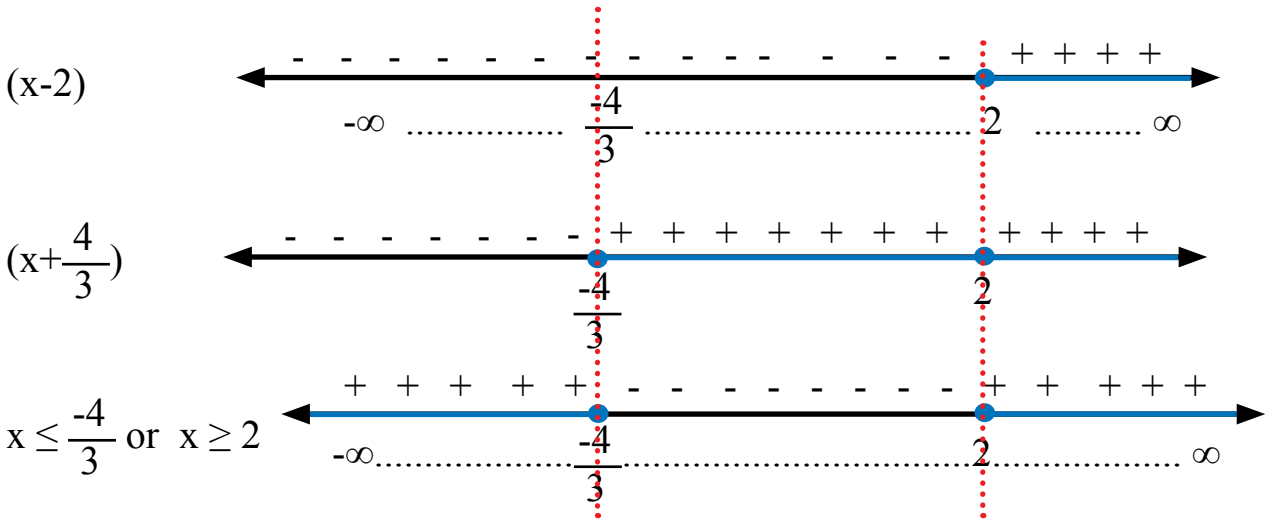
$3x^2 - 2x - 8 \geq 0$

**الخطوة الاولى :** نجد حل المعادلة المرافقة من الدرجة الثانية باستعمال القانون العام ( الدستور ) .

$3x^2 - 2x - 8 = 0$ ، $a = 3$ , $b = -2$ ، $c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 96}}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 10}{6} \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = \frac{-4}{3}$$

**الخطوة الثانية :** نعين جذور المعادلة على مستقيم الأعداد ونضع اشارات الأقواس .




**الخطوة الثالثة :** نقاطع الفترات للحصول علي مجموعة الحل التي تحقق المتباينة وهي اتحاد مجموعتين ( نصف مغلقة أو نصف مفتوحة ) وذلك لأن المتباينة تحتوي علاقة أكبر من أو يساوي:

$s = (-\infty , \frac{-4}{3}] \cup [2,\infty)$.

## [1-2-3] متباينات القيمة المطلقة Absolute Value Inequalities

درست سابقا أن القيمة المطلقة $|x|$ لعدد حقيقي x هي المسافة على مستقيم الأعداد بين هذا العدد والصفر. ولما كان البعد عددا موجبا فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. ويمكن أيضا حل المتباينات التي تتضمن قيما مطلقة فمثلا $|x| \leq 1$ تعني أن العدد الحقيقي x بعده عن الصفر أصغر أو يساوي 1 على مستقيم الأعداد ويمكن تمثيل حلول هذه المتباينة كما في الشكل:




أما $|x| \geq 1$ يعني أن بعد x عن الصفر هو أكبر من أو يساوي 1 على مستقيم الأعداد كما يبين الشكل الآتي:

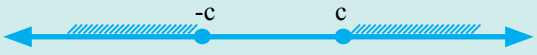
بصورة عامة إذا كان c عددا حقيقيا موجبا فإن:




$|x| \leq c$ تكافئ $-c \leq x \leq c$




$|x| \geq c$ تكافئ $x \geq c$ او $x \leq -c$



**مثال (7)** **جد مجموعة الحل للمتباينات التالية علي شكل فترة ومثلها علي مستقيم الأعداد .**

1) $|x+3|<7 \Rightarrow \quad x+3>-7 \quad \text{and} \quad x+3<7$ خواص القيمة المطلقة

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-7-3 \Rightarrow x>-10 \Rightarrow x\in(-10,\infty) \\ \text{and } x<7-3 \Rightarrow x<4 \Rightarrow x\in(-\infty,4) \end{cases}$$ بإضافة النظير الجمعي للعدد 3

$$\Rightarrow \quad x\in(-10,\infty)\cap(-\infty,4) \Rightarrow x\in(-10,4)$$

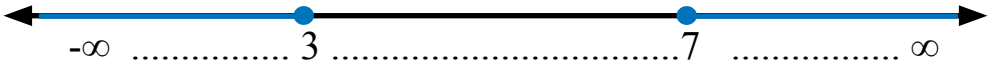
متباينة أومجموعة الحل هي $s=(-10,4)$




2) $|x-5|\geq 2 \quad \Rightarrow \quad x-5\leq -2 \quad \text{or} \quad x-5\geq 2$ خواص القيمة المطلقة

$$\Rightarrow \begin{cases} x\leq -2+5 \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow x\in(-\infty,3] \\ \text{or } x\geq 2+5 \Rightarrow x\geq 7 \Rightarrow x\in[7,\infty) \end{cases}$$ خواص التباين

مجموعة الحل هي $s=(-\infty,3]\cup[7,\infty)$




لكتابة المتباينة المطلقة من التمثيل البياني لها نتبع الخطوات الآتية :

**أولاً :** نبحث عن نصف قطر r لفترة المتباينة بالعلاقة $r=\frac{b-a}{2}$ حيث العدد a يمثل النهاية اليسرى لفترة المتباينة والعدد b يمثل النهاية اليمنى لفترة المتباينة .

**ثانياً :** نجد c مركز فترة المتباينة بالعلاقة $c=b-r$.

**ثالثاً :** نكتب المتباينة بالصيغة $|x-c|<r$ أو $|x-c|\leq r$ اذا كانت فترة الحل على مستقيم الأعداد فترة متصلة .

**رابعاً :** نكتب المتباينة بالصيغة $|x-c|>r$ أو $|x-c|\geq r$ اذا كانت فترة الحل على مستقيم الأعداد من اتحاد فترتين منفصلتين .




**مثال (8)** **اكتب متباينة القيمة المطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :**

1)



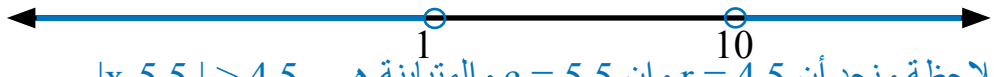

نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r=2$ وان $c=0$ والمتباينة هي $|x-0|<2$ أو $|x|<2$

2)




نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r=2$ وان $c=-1$ والمتباينة هي $|x+1|\geq 2$

3)




نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r=4.5$ وان $c=5.5$ والمتباينة هي $|x-5.5|>4.5$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍّ مما يأتي:

1) اذا كان $-3x + 17 > -13$ فان :

a) $x \in (10, \infty)$ b) $x \in [10, \infty)$ c) $x \in (-\infty, 10)$ d) $x \in [-10, 10]$

2) اذا كان $|x - 1| > 5$ فان :

a) $x \in (-4, 6)$ b) $x \in [-4, 6]$

c) $x \in (-\infty, -4) \cup (6, \infty)$ d) $x \in (-\infty, -4] \cup [6, \infty)$

## التمرينات

**اكتب المتباينات التالية بالصيغة العامة بأبسط صورة:**

3) $4x + 4 \leq 16$ 4) $17x + 5 \geq -6x^2$ 5) $5x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1$

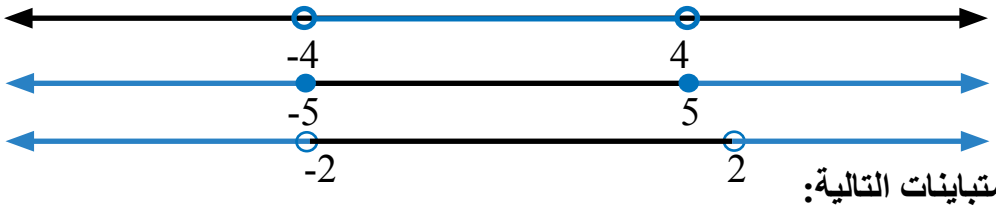
**جد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية التالية باستعمال الاشارات :**

6) $-x^2 + 6x - 7 \geq 0$ 7) $3x^2 - 2x - 8 \geq 0$ 8) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$

9) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ 10) $x^2 - 6x - 8 < 0$

**اكتب متباينة القيمة المطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :**

11) 12) 13)




**حل كلا من المتباينات التالية:**

14) $|x| > 2$ 15) $2|3x - 4| - 1 > 5$ 16) $|\frac{3}{4} - x| \geq \frac{7}{8}$

17) $|2x-1| \leq 7$ 18) $|x+5| < -8$ 19) $|x+2| > 6$

## مسائلُ حياتيةٌ



20) **غوص:** يجب أن يبقى ضغط أسطوانة الغوص 1136 كغم لكل بوصة مربعة، بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 227 كغم لكل بوصة مربعة. اكتب متباينة تبين مدى الضغط المثالي لأسطوانة الغاز.



21) **غذاء:** يبلغ وزن علبة عسل التمر من مصانع تعليب كربلاء 950 غم، يقوم مسؤول السيطرة النوعية باختيار بعض العلب للتحقق من أوزانها، وتُرفض كل علبة يزيد الفرق بينها ووزن علبة عسل التمر 10غم.
اكتب متباينة أوزان العلب غير المقبولة ومثّل ذلك على مستقيم الأعداد.

# الدرسُ [1-3]

## الدوال الحقيقية الرئيسة ( الأم )  The Parent Real Functions

**فكرة الدرس**

* التعرف الى الدوال الرئيسة الام .
* ايجاد المجال والمدى للدوال الرئيسة الام.

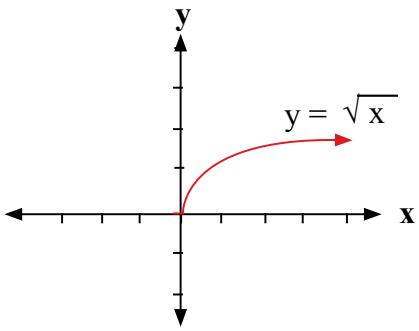
**المفردات**

* الدالة الرئيسة الأم
* الدالة الثابتة
* الدالة المحايدة
* الدالة التربيعية
* الدالة التكعيبية
* دالة الجذر التربيعي
* دالة المطلق
* الدالة النسبية (المقلوب)
* الدالة الدرجية(السلمية)

**تعلم**



القطارات المغناطيسية تغير مساراتها بمنحنٍ وذلك لسرعتها العالية ويمثل تغيير مسارها جزءاً من منحني الدالة $y = \sqrt{x}$

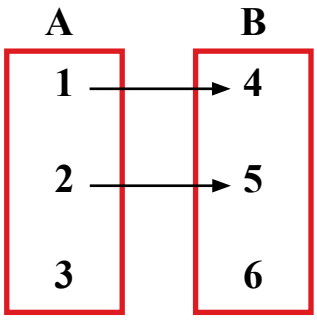



تعلمت سابقا ان العلاقة المعرَّفة من المجموعة X الى المجموعة Y عبارة عن مجموعة جزئية مكَّونة من الأزواج المرتبة بالشكل (x,y) حيث $x \in X$ و $y \in Y$.

الدالة $f:X \to Y$ هي علاقة تربط كل عنصر في X بقيمة واحدة ( صورة واحدة) في Y . وتسمَّى المجموعة X بمجال الدالة (Domain)، والمجموعة Y بالمجال المقابل للدالة (Co-Domain)، وتسمَّى مجموعة جميع الصور في المجال المقابل بالمدى .(Range) وتسمَّى بالدالة الحقيقية اذا كان مجالها والمجال المقابل لها مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزءاً منها .

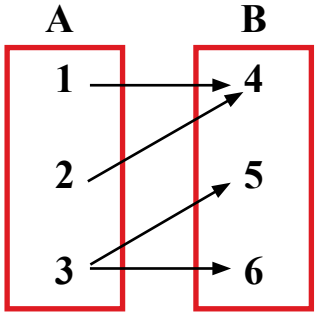
**مثال (1)**

بيِّن إذا كانت العلاقات التالية تمثل دالة ام لا.



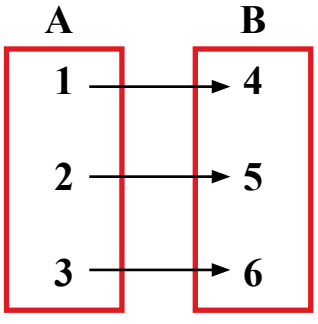

$f : A \to B$

f - لاتمثل دالة لان العنصر 3 لم يرتبط باي عنصر من B




$f : A \to B$

f - لاتمثل دالة لان العنصر 3 من A مرتبط بعنصرين 5 ، 6 من B




$f : A \to B$

f - تمثل دالة لان كل عنصر من A مرتبط بعنصر واحد من B

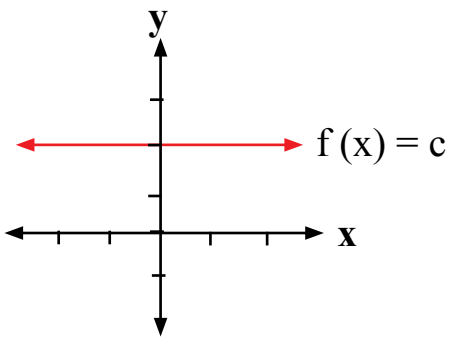
## مفهوم الدوال الرئيسة ( الأم ) Concept of Parent Functions

الدوال الرئيسة (الام) هي مجموعة من الدوال الحقيقية منحنياتها تشترك في صفة واحدة أو أكثر. وتعرف الدالة الرئيسة (الام) انها ابسط صورة للدالة في العائلة. ويمكن تمثيل باقي دوال العائلة عن طريق اجراء التحويلات الهندسية عليها.

ملاحظة: سوف يتم دراسة الدالة التربيعية والتكعيبية ودالة المطلق بالتفصيل في الدروس القادمة اما في هذا الدرس فسوف نتطرق الى الدالة الثابتة ، الدالة المحايدة ، دالة الجذر التربيعي ، الدالة النسبية (المقلوب) والدالة الدرجية ( الدالة السلمية ) .

### أولاً : الدالة الثابتة Constant Function

تسمى الدالة المعَّرفة بالشكل $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي بالدالة الثابتة وتُمثَّل بشكل مستقيم افقي يوازي محور السينات.




**مجال الدالة الثابتة:** هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية

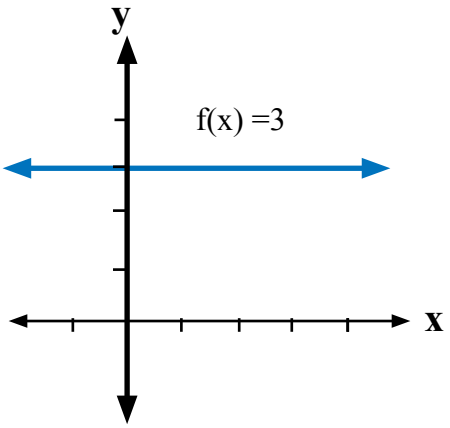
**مدى الدالة الثابتة:** هو { c }

**مثال (2)**

ارسم بيان الدالة $f(x) = 3$ وحدِّد المجال والمدى

نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |




مجال الدالة = R

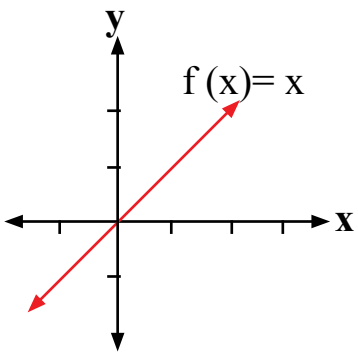
مدى الدالة= {3}

### ثانياً : الدالة المحايدة Identity Function

وتكتب بالشكل $f(x) = x$ وتمثل بمنحني جميع النقاط التي احداثياتها (a ,a)

مجال الدالة المحايدة: هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية R

ملاحظة: مدى الدالة المحايدة : هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية .



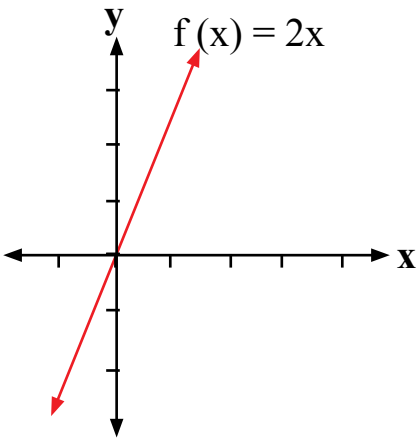
**مثال (3)**

ارسم بيان الدالة $f(x) = 2x$ وحدِّد مجال الدالة

نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

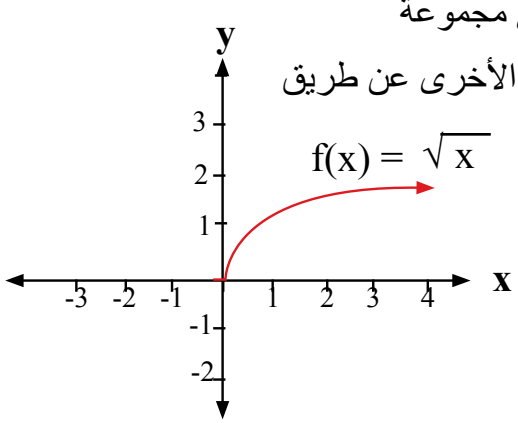
مجال الدالة = R




## ثالثاً : دالة الجذر التربيعي Square Root Function

تُسمَّى الدالّة المعرَّفة $f(x) = \sqrt{x}$ بالشكل بالدالة الرئيسة الام في مجموعة الدوال الجذرية (التربيعية) وتستخدم للحصول على الدوال الجذرية الأخرى عن طريق التحويلات الهندسية.

**مجال دالة الجذر التربيعي:** $\{ x \in R : x \geq 0 \}$




ملاحظة: مجال دالة الجذر التربيعي هو جميع القيم التي تجعل ما تحت الجذر أكبر او يساوي صفر

**مثال (4)**

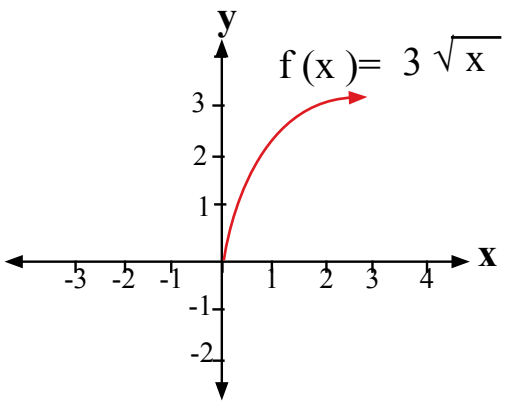
ارسم بيان الدالة $f(x) = 3\sqrt{x}$ وحدد مجال الدالة

لإيجاد مجال الدالة يجب أن تكون $x \geq 0$

اذن مجال الدالة $\{ x \in R : x \geq 0 \}$

الان نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

| x | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 3 | 6 | 9 |

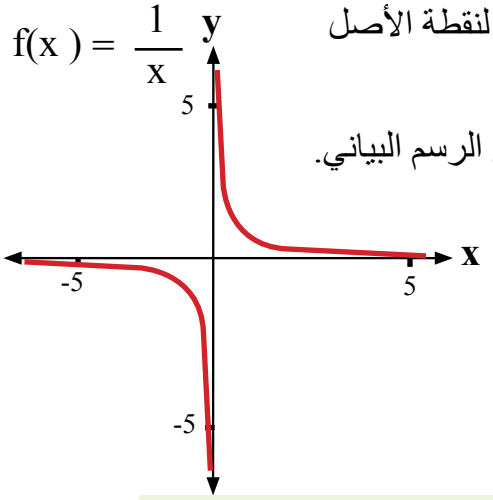



وبذلك فان الرسم البياني للدالة هو نفس الدالة الرئيسة بعد تمدده.

## رابعاً : دالة النسبية (المقلوب ) Recicproccal Function

وتكتب بالصورة $f(x) = \frac{1}{x}$ , $x \neq 0$ وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

أي ان جزأي الاقتران متناظران بالنسبة لنقطة الأصل كما موضح في الرسم البياني.




مجال دالة المقلوب: $\{ x \in R: x \neq 0 \}$

| x | 2 | 1 | -2 | -1 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $\frac{1}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{3}$ |

ملاحظة: مجال دالة المقلوب ( النسبية ) هو جميع القيم عدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً .

**مثال (5)**

جد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{2}{3x+7}$ غير معرفة

نجد قيمة x التي تجعل المقام صفرا $3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$

اذن الدالة غير معرفة عندما $x = \frac{-7}{3}$

**مثال (6)**

عين مجال الدالة $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

مجال الدالة هو {اصفار المقام} / R مجموعة كل الاعداد الحقيقية عدا القيم التي تجعل المقام تساوي صفر

وعلية بوضع المقام = صفر فإن: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 3$ or $x = -3$

لذا مجال الدالة هو R / {3, -3}

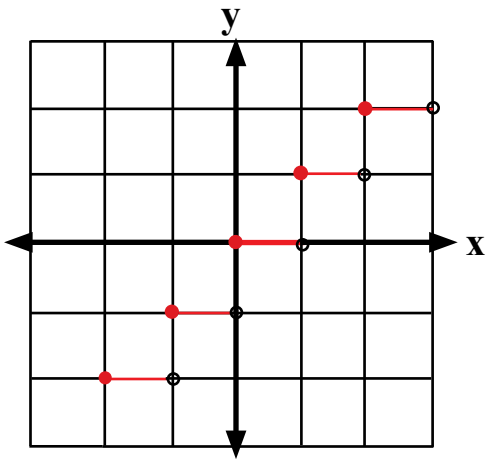
## خامساً : الدالة الدرجية ( السلمية ) : Step Function

الدالة $f : R \rightarrow Z$ والتي قاعدتها $f(x) = [[ x ]]$ تسمى دالة العدد الصحيح x حيث $[[ x ]]$ هو أكبر عدد صحيح أصغرمن أو يساوي x بصيغة اخرى .

اذا كان $x \in R$ , $n \in Z$ فأن $n \leq x < n+1$ وان $f(x) = [[ x ]] = n$

**مثال (7)**

ارسم الدالة $f(x) = [[x]]$ بيانيا واستخدم جدول القيم :




| n | الفترة | f (x) |
|---|---|---|
| ..... | ..... | ..... |
| -2 | $-2 \leq x < -1$ | -2 |
| -1 | $-1 \leq x < 0$ | -1 |
| 0 | $0 \leq x < 1$ | 0 |
| 1 | $1 \leq x < 2$ | 1 |
| 2 | $2 \leq x < 3$ | 2 |
| ..... | ..... | ..... |

مجال الدالة الدرجية: مجموعة كل الاعداد الحقيقية R .

**مثال (8)**

جد ناتج الدالة الدرجية لكلٍّ ممّا يأتي: $[[-2.1]]$ , $[[3.6]]$

$[[3.6]] = 3$ بحسب التعريف

$[[-2.1]] = -3$

**الاختيار من متعدد** اختر الإجابةَ الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1 ) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x-4}$ هو

a) $\{ x \in R: x > 2 \}$ b) $\{ x \in R: x < 2 \}$ c) $\{ x \in R: x \geq 2 \}$ d) $\{ x \in R: x \leq 2 \}$

2 ) مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{2-x}$ هو

a) $\{ x \in R : R / \{2\} \}$ b) $\{ x \in R: R / \{3\} \}$ c) $\{ x \in R: R / \{-2\} \}$ d) $\{x \in R: x \neq 9 \}$

3 ) ناتج الدالة الدرجية $[[-2 . 3]]$ هو

a) -2 b) 2 c) 3 d) -3

## التمرينات

**جد ناتج الدالة الدرجية لكلٍّ مما يأتي:**

4) $[[0.5]]$ 5) $[[-1.99]]$ 6) $[[2.99]]$

**جد القيم التي تجعل الدالة غير معرفة :**

7) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ 8) $f(x) = \frac{9}{x-3}$

9) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ 10) $f(x) = \sqrt{2x} - 1$

**جد المجال لكل من الدوال الآتية:**

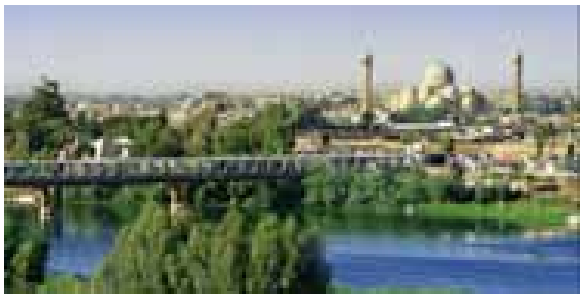
11) $f(x) = \frac{3}{2-x}$ 12) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ 13) $f(x) = \sqrt{x-5}$

**مثّل كل دالة بيانيا مستخدما الدالة الرئيسة الام وحدّد مجالها**

14) $f(x) = -3x$ 15) $f(x) = [[x]] + 1$ 16) $f(x) = 2x - 1$

17) $f(x) = \sqrt{x} + 3$ 18) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

## مسائلُ حياتيةُ



19) قطعت سيارة انطلقت من مدينة بغداد الى مدينة الموصل مسافة 450km بسرعة مقدارها Vkm/h, اكتب دالة الزمن بدلالة السرعة ومثّلها بيانيا.



20) رحلة مدرسية لطلاب مدرسة لزيارة مأذنة الملوية في سامراء. قرّرت المدرسة اذا كان عدد الطلاب لهذه الرحلة 40 طالبا أو أقل فانهم سيستأجرون حافلات تتسع لـ 15 شخصا. واذا كان هناك اكثر من 40 طالبا فانهم سوف يستأجرون حافلات تتسع ل 56 شخصا.

1 - ماهي الدالة التي يمكن استخدامها لتمثيل ذلك ؟

2 - كم عدد الحافلات التي تحتاجها المدرسة اذا كان عدد الطلبة الراغبين بالذهاب 412 طالبا ؟

# الدرسُ [1-4]

## الدالة التربيعية والدالة التكعيبية

## Quadratic and Cubic Function

**فكرة الدرس**

* التعرف الى الدالة التربيعية و الدالة التكعيبية (الأم)
* التعرف الى مجال الدالة ومداها
* تمثيل الدالة بيانيا
* التعرف إلى التحويلات الهندسية للدالة التربيعية و التكعيبية.

**المفردات**

* االدالة التربيعية ، الدالة التكعيبية ، مجال الدالة ، مدى الدالة ،تحويلات الدالة التربيعية و التكعيبية

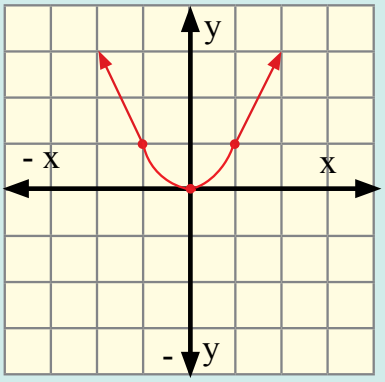
**تعلم**

الدوال الحقيقية التربيعية و التكعيبية (الأم) وتحويلاتها الهندسية لها تطبيقات كثيرة في حياتنا اليومية منها الهندسية في انشاء المباني و عمل نافورات المياه... و كذلك نلاحظ بأن الثعابين تسير بشكل ملتوي فمثلا جزء من مسار ثعبان الأنكوندا يمثل إحدى التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية الأم $f(x) = x^3$ .



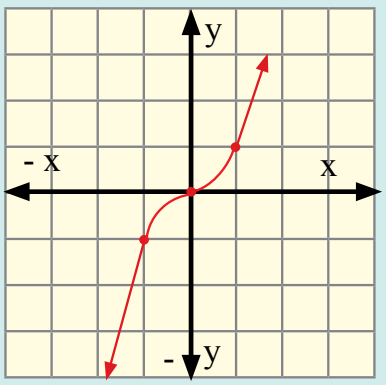
### [1-4-1] الدالة التربيعية و الدالة التكعيبية: Quadratic and Cubic Functions

تعرفت من الدرس السابق إلى خمسة من الدوال الرئيسة (الأم ) و تعرفت إلى كيفية إيجاد مجالها و المدى لها، والأن سوف نستكمل باقي الدوال الأم وهي الدالة التربيعية والدالة التكعيبية و نتعرف إلى المجال والمدى لهما و تمثيلهما البياني إضافة الى تحويلاتهما الهندسية .




**الدالة التربيعية :** الدالة $f:R \to R$ ، حيث $f(x) = x^2$ والمعرفة ، حيث x عدد حقيقي .تسمى بالدالة التربيعية (الأم) .

وتمثيلها البياني رأسه عند نقطة الأصل ( 0,0 ) و متناظرحول الجزء الموجب من محور الصادات ، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية ،ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة .




**الدالة التكعيبية :** الدالة $f:R \to R$ والمعرفة بالعلاقة $f(x) = x^3$ ، حيث x عدد حقيقي .تسمى بالدالة التكعيبية (الأم) .

وتمثيلها البياني هو منحنٍ يمر بنقطة الأصل و جزؤه الموجب يقع في الربع الأول و الجزء ألسالب يقع في الربع الثالث ومتناظرة مع نقطة الأصل، و مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية وكذلك مداها مجموعة الأعداد الحقيقية .

نقطة انعطاف الدالة (انقلاب الدالة) هو (0,0)

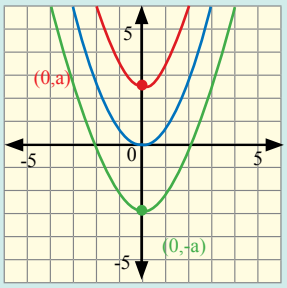
## [1-4-2] التحويلات الهندسية للدالة التربيعية:
## Geometric Transformations For Quadratic Function

### أولاً : الانسحاب

$f(x)= a x^2 + bx +c$ حيث $a, b, c \in R$ و $a \neq 0$ تسمى معاملات الدالة التربيعية .

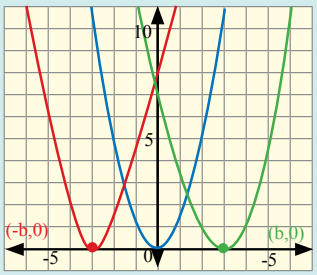
$f(x) = x^2$ هي أبسط الدوال التربيعية وتسمى الدالة الأم ، وسوف نتطرق الى أنسحابات الدالة على المحاور في المستوى الأحداثي.

$y = x^2 - a , a > 0$
الرأس $(0,-a)$
انسحاب للأسفل على محور Y




$y = x^2 + a , a>0$
الرأس $(0,a)$
انسحاب للأعلى على محور Y

$y = (x - b)^2 , b>0$
الرأس $(b,0)$
انسحاب لليمين على محور X




$y = (x + b)^2 , b>0$
الرأس $(-b ,0)$
انسحاب لليسار على محور X

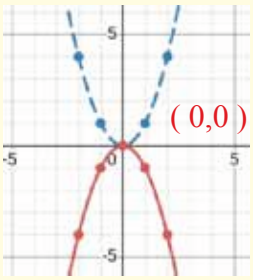
### ثانيا : الأنعكاس

تعلمت من دراستك السابقة الأنعكاسات في المستوى الإحداثي وسوف نذكرك به و كما يلي :

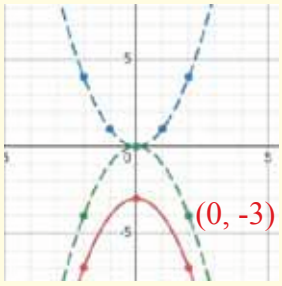
| الانعكاس | حول محور السينات | حول محور الصادات | حول نقطة الأصل | حول الخط المستقيم y=x |
|---|---|---|---|---|
| من الأصل الى الصورة | $(a , b) \rightarrow (a , -b)$ | $(a , b) \rightarrow (-a , b)$ | $(a , b) \rightarrow (-a , -b)$ | $(a , b) \rightarrow (b , a)$ |

والأن سوف ندرس انعكاس الدالة التربيعية الأم $y = x^2$ على محور x و كذلك أنعكاسها وأنسحابها على المحاور في أن واحد.

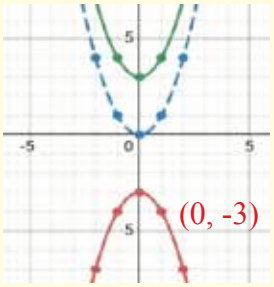
الدالة $y = -x^2$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X وهو منحني مقلوب للأسفل و نقطة الرأس هي ( 0,0 )



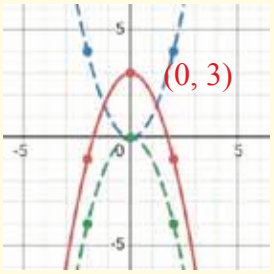

الدالة $y =- x^2 - 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X مع انسحاب للأسفل على محور Y و نقطة الرأس هي ( -3 , 0 )



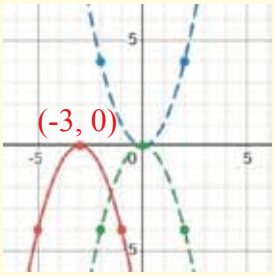

نلاحظ أن الدالة $y = -x^2- 3$ هي نفسها الدالة $y = -(x^2+ 3)$ وهي أنعكاس للدالة $y = x^2+ 3$ على محور X ونقطة الرأس هي ( -3 , 0 )



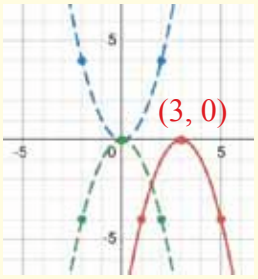

الدالة $y= -x^2 +3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^2$ على محور X مع انسحاب للأعلى على محور Y ونقطة الرأس هي ( 0 , 3 )




الدالة $y= -(x + 3)^2$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^2$ على محور X مع انسحاب لليسار على محور X ونقطة الرأس هي ( -3 , 0 )




الدالة $y= -(x -3)^2$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^2$ على محور X مع انسحاب لليمين على محور X ونقطة الرأس هي ( 3 , 0 )



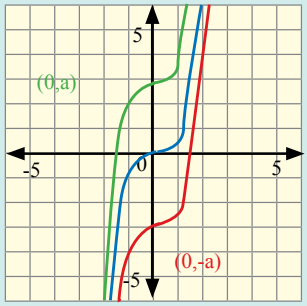
## [1-4-3] التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية:
## Geometric Transformations For Cubic Function

### أولاً: الانسحاب

$f(x)= ax^3 + bx^2 +cx+d$ حيث $a, b, c, d \in R$ و $a \neq 0$ و أن $a, b, c, d$ تسمى معاملات الدالة التكعيبية .

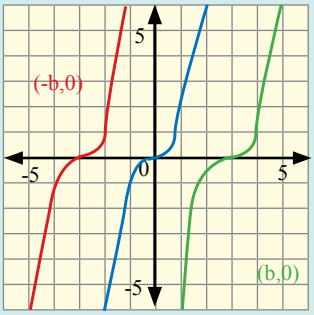
$f(x) = x^3$ هي أبسط الدوال التكعيبية وتسمى الدالة الأم ، وسوف نتطرق الى انسحاباتها على المحور.

$y = x^3 - a , a > 0$
نقطة الانعطاف $(0 ,-a)$
انسحاب للاسفل على محور Y




$y = x^3 + a , a > 0$
نقطة الانعطاف $(0,a)$
انسحاب للاعلى على محور Y

$y = (x + b)^3 , b>0$
نقطة الانعطاف $(-b ,0)$
انسحاب لليسار على محور X

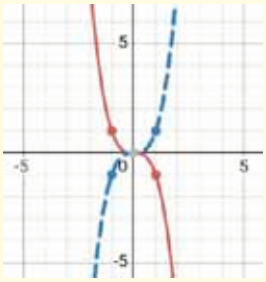



$y = (x - b)^3 , b > 0$
نقطة الانعطاف $(b,0)$
انسحاب لليمين على محور X

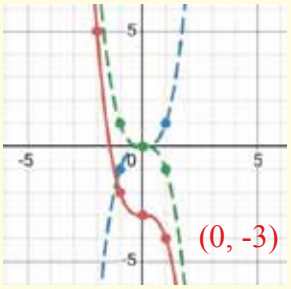
### ثانياً: الانعكاس

والآن سوف ندرس انعكاس الدالة التكعيبية الأم $y = x^3$ على محور Y و كذلك أنعكاسها وأنسحابها على المحاور في أن واحد.

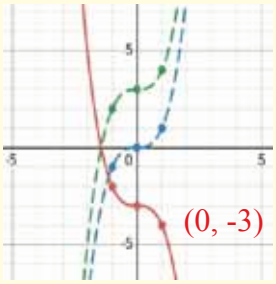
الدالة $y = -x^3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^3$ على محور X وهو منحني جزئه الاول في الربع الرابع والجزء الثاني في الربع الثاني ونقطة الانعطاف ( الانقلاب ) هي
( 0,0 )



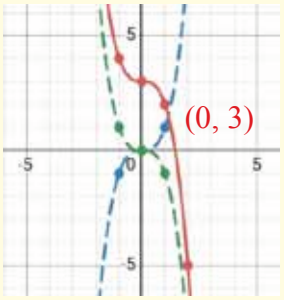
الدالة $y =- x^3 - 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y=x^3$ على محور X مع انسحاب للأسفل على محور Y و نقطة الانعطاف ( الانقلاب ) هي $(0 , -3)$



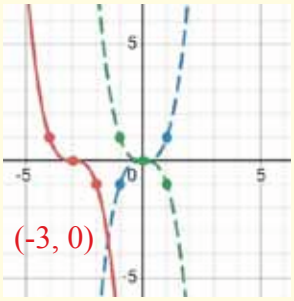

نلاحظ أن الدالة $y = -x^3 - 3$ هي نفسها الدالة $y = -(x^3 + 3)$ وهي أنعكاس للدالة $y = x^2 + 3$ على محور X ونقطة الانعطاف ( الانقلاب ) هي
( 0 , -3 )



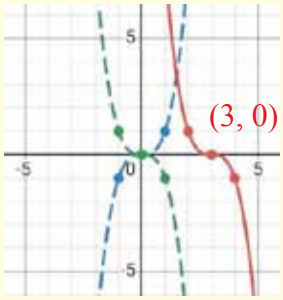

الدالة $y= -x^3 +3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^3$ على محور X مع انسحاب للأعلى على محور Yونقطة الانعطاف ( الانقلاب) هي $(0 , 3)$




الدالة $y = -(x +3)^3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^3$ على محور X مع انسحاب لليسار على محور X ونقطة الانعطاف ( الانقلاب) هي $(-3 , 0)$

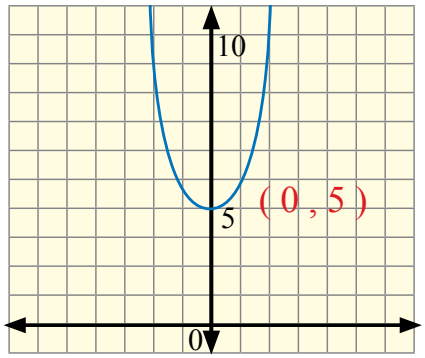



الدالة $y= -(x -3)^3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y= x^3$ على محور X مع انسحاب لليمين على محور X ونقطة الانعطاف ( الانقلاب) هي $(3 , 0)$



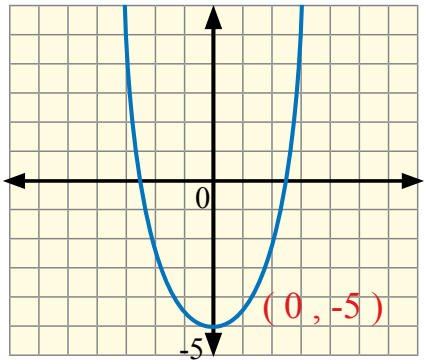

ملاحظة: سوف نكتفي في هذا الصف بدراسة هذه الدول الأم وبعض التحويلات الهندسية لها أما الدوال متعددة الحدود الأخرى فسوف يتم دراستها في الصفوف اللاحقة .

**مثال (1)**



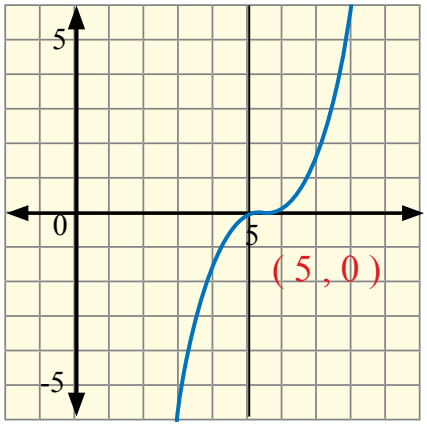

الدالة $f(x)= x^2 + 5$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها $\{ y \in R : y \geq 5 \}$ ، الرأس عند النقطة (0,5) والتحويل يمثل انسحاباً للأعلى على محور Y

**مثال (2)**



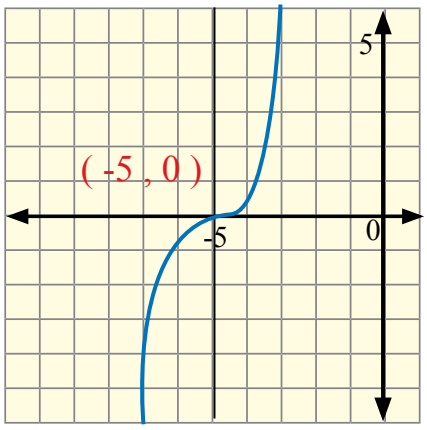

الدالة $f(x)= x^2 - 5$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها $\{ y \in R : y \geq -5 \}$ ، الرأس عند النقطة ( 0, -5) والتحويل يمثل انسحاباً للأسفل على محور Y

**مثال (3)**




الدالة $y = ( x - 5)^3$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور ومداها مجموعة الاعداد الحقيقية، نقطة الانعطاف (5،0) والتحويل يمثل انسحاباً لليمين على محور X

**مثال (4)**




الدالة $y = ( x + 5)^3$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها مجموعة الاعداد الحقيقية، نقطة الانعطاف ( 0 ، -5) والتحويل يمثل انسحاباً لليسار على محور X

## الاختيار من متعدد

**اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:**

1) مجال الدالة $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ هو:

a) $[\frac{3}{2}، \infty)$ b) $(\frac{3}{2}، \infty)$ c) $(\frac{2}{3}، \infty)$ d) $[\frac{2}{3}، \infty)$

2) مجال الدالة $f(x)=\frac{x}{x-3}$ هو:

a) R b) R \ {3} c) {3} d) R \ {1,3}

## التمرينات

**جد المجال و المدى لكلِّ دالة مما يأتي :**

3) $y = x^2 + 6$ 4) $y = (x - 7)^2$ 5) $y = (x + 9)^3$ 6) $y = x^3 - 9$

**اذكر نوع التحويلات لكل دالة من الدوال التالية بالنسبة إلى الدالة الأم :**

7) $y = x^2 - 10$ 8) $y = (x - 14)^2$ 9) $y = x^3 + 12$ 10) $y = (x - 12)^3$

11) $y = 4 - x^2$ 12) $y = 4 - x^3$ 13) $y = -(x + 1)^2$ 14) $y = -(x - 1)^2$

15) $y = -4 - x^3$ 16) $y = -(x - 1)^3$

**ارسم بيانياً كلَّ دالة من الدوال الآتية :**

17) $y = x^2 + 7$ 18) $y = x^2 - 7$ 19) $y = (x - 1)^2$

20) $y = (x + 1)^2$ 21) $y = x^3 + 1$ 22) $y = x^3 - 1$

23) $y = (x + 1)^3$ 24) $y = (x - 1)^3$ 25) $y = 8 - x^2$

26) $y = -(x + 2)^2$ 27) $y = -x^3 - 2$ 28) $y = -(x + 2)^3$

## مسائلُ حياتيةٌ



29) **هندسة :** تعمل النافورات المائية في الحدائق العامة باشكال مختلفة والبعض يعمل كما نلاحظ في الصورة تمثله الدالة $f(x) = 2 - x^2$ وهي إحدى التحويلات الهندسية للدالة التربيعية الأم . مثل هذه الدالة بيانيا وبين علاقتها بالدالة التربيعية الأم .



30) **سباق سيارات :** تصمم شوارع سباقات السيارات بشكل هندسي إذ تكون منه أجزاء ملتوية وبدرجات مختلفة ونلاحظ أنَّ جزءًا منه تمثله الدالة $f(x) = -(x + 2)^3$ وهي احدى التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية ألأم .ارسم بيانياً هذه الدالة، وبين علاقتها بالدالة الأم .

# الدرسُ [1-5] دالة القيمة المطلقة

## Absolute Value Function

**فكرة الدرس**

* التعرف الى دالة القيمة المطلقة الأم
* التعرف الى التحويلات الهندسية

**المفردات**

* رسم دالة المطلق
* المجال والمدى لدالة المطلق
* التحويلات الهندسية لدالة المطلق

**تعلم**

متوسط درجة حرارة الجسم الداخلية للإنسان في حالاتها الاعتيادية غير المرضية هي 37.0 درجة مئوية. ودرجة الحرارة يمكن أن تختلف بمقدار يصل إلى 0.5 درجة، ولا تزال تعد طبيعية وتحسب رياضياً بالدالة $y= |x-37.0|$ حيث x تمثل درجة حرارة الشخص.




درسنا سابقا القيمة المطلقة لعدد ما تكون دائما موجبة فمثلا $|-3|=3$ وتعرف الدوال المعرفة بالشكل $f(x) = a|x + b| + c$ بدوال القيمة المطلقة، والتمثيل البياني لهذه الدوال على شكل حرف V حيث يمثل الرأس أصغر أو أكبر قيمة للدالة.

| خصائص القيمة المطلقة للعدد الحقيقي | |
|---|---|
| العبارة | أمثلة |
| $\forall x \in R \ , \ \|x\| \geq 0$ | $-6 \in R \ , \ \|-6\| = 6 > 0$ |
| $\forall x \in R \ , \ \|-x\| = \|x\|$ | $\|-8\| = \|8\| = 8$ |
| $\forall x \in R \ , \ -\|x\| < x \leq \|x\|$ | $-\|7\| = -7 < 7 \leq 7 = \|7\|$ |
| $\forall x \in R \ , \ x^2=\|x\|^2$ | $(-3)^2 = 9 = \|-3\|^2$ |
| $\forall x , y \in R , \|x.y\| = \|x\|.\|y\|$ | $x= 2 \ , \ y= -9$<br>$\|x.y\|= \|2(-9)\|=\|-18\|=18$<br>$\|x\|.\|y\|= \|2\|.\|-9\|=2(9)=18$<br>$\Rightarrow \|2(-9)\| = 18 = \|2\| \ \|-9\|$ |
| $\forall x , y \in R , \left\|\frac{y}{x}\right\| = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ | $x= 2 \ , \ y= -9$<br>$\left\|\frac{-9}{2}\right\| = \frac{\|-9\|}{\|2\|} = \frac{9}{2}$ |
| $\forall a > 0 , \|x\| \leq a , - a \leq x \leq a$ | $\|x\| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$ |
| $\forall x , y \in R , \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ | $x= 2 \ , \ y= 6$<br>$\|6+2\| = 8 = \|2\| + \|6\| \Rightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ |

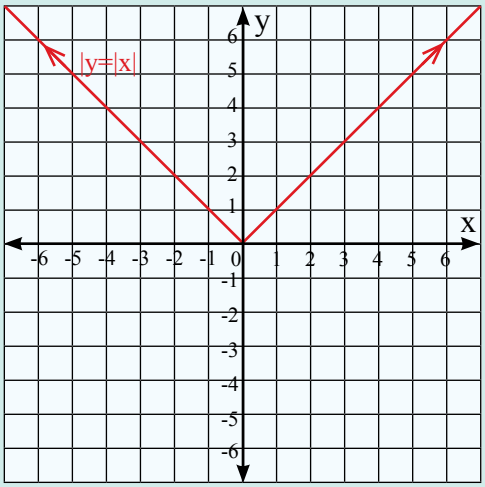
**مثال (1)** استعمل خاصية القيمة المطلقة لتحسب المتباينة التالية:

$x= 2 \ , \ y= -6$

$\forall x , y \in R , |x+y| \leq |x| + |y|$

$|x + y| = |2 - 6| = 4$
$|x| + |y| =2 + 6 = 8$
$\Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$

## [1-5-1] دالة المطلق الرئيسة الأم The Main Absolute Value Function




تسمى الدالة المعرفة بالشكل $f(x)=|x|$ بالدالة الرئيسة (الأم) في مجموعة الدوال المطلقة، وتستخدم للحصول على الدوال المطلقة الأخرى عن طريق تحويلات هندسية كما سنبين ذلك لاحقا.

نستطيع تعريف الدالة الرئيسة كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x \ , \forall\, x > 0 \\ 0 \ , \forall\, x = 0 \\ -x \ , \forall\, x < 0 \end{cases}$$

ولرسم الدالة $f(x) = |x|$ بيانيا استخدم جدول القيم.

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| \|x\| | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |

**خصائص منحني دالة القيمة المطلقة الأم:**

1) مجال الدالة هو R ومدى الدالة $[0,\infty)$ .

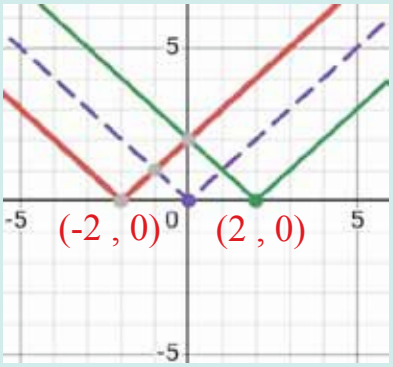
2) المنحني متماثل حول محور y.

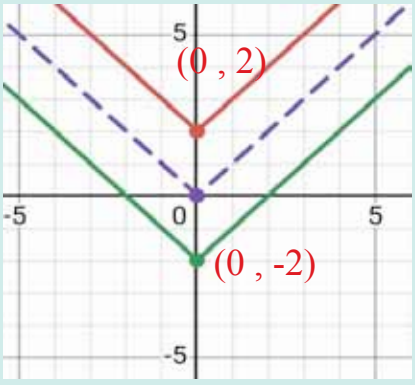
3) رأس الدالة هي النقطة (0,0).

## [1-5-2] التحويلات الهندسية للدالة المطلقة الرئيسة (الأم) وتمثيلها
## Geometric Trransfers of Main Absolute Function and Its Representaion

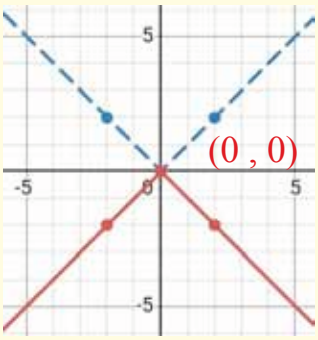
الصيغة العامة للدالة المطلقة تكون بالشكل $f(x)= a|x+b|+c$ ، حيث $a\neq0$ ومن خلال الرسم البياني للدالة الرئيسة $f(x)=|x|$ يمكن الحصول على الرسم البياني لأي دالة مطلقة.

| | | | |
|---|---|---|---|
| انسحاب $f(x) = \|x + 2\|$ لليسار على محور X نقطة الرأس هي (-2 , 0) | انسحاب $f(x) = \|x - 2\|$ لليمين على محور X نقطة الرأس هي (2 , 0) | انسحاب $f(x) = \|x\| + 2$ للأعلى على محور Y نقطة الرأس هي (0 , 2) | انسحاب $f(x) = \|x\| - 2$ للأسفل على محور Y نقطة الرأس هي (0 , -2) |

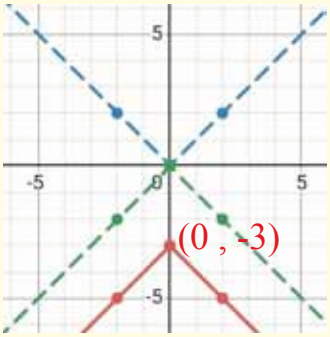


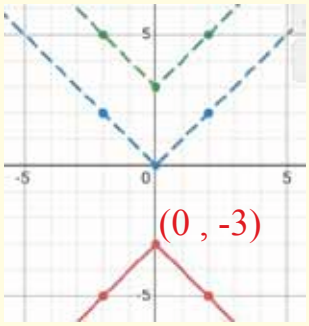
الدالة $y = -|x|$ هي أنعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X وهو منحني مقلوب للأسفل ونقطة الرأس هي ( 0,0 )



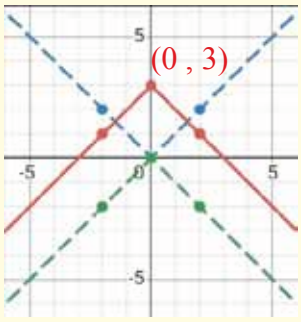

الدالة $y = -|x| - 3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب للأسفل على محور Y و نقطة الرأس هي ( 0 , -3 )



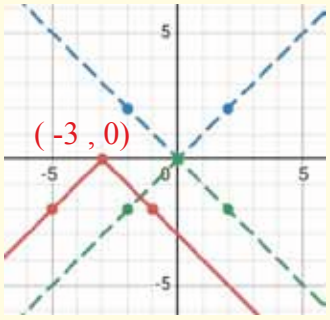

نلاحظ أن الدالة $y = -|x| -3$ هي نفسها الدالة $y = -(|x| +3)$ وهي أنعكاس للدالة $y = |x| + 3$ على محور X ونقطة الرأس هي ( 0 , -3 )



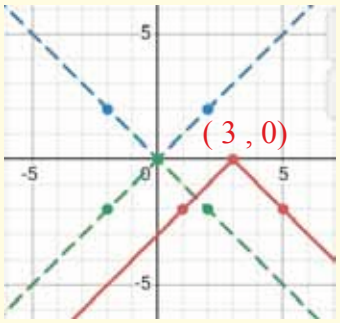

الدالة $y = -|x| +3$ هي أنعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب للأعلى على محور Y ونقطة الرأس هي ( 0 , 3 )




الدالة $y = -|x +3|$ هي أنعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب لليسار على محور X ونقطة الرأس هي ( -3 , 0 )




الدالة $y = -|x -3|$ هي أنعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب لليمين على محور X و نقطة الرأس هي ( 3 , 0 )

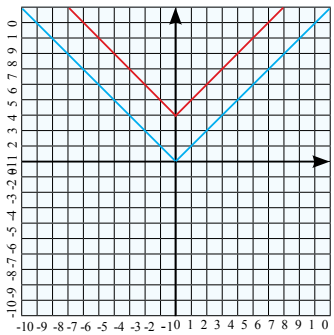



**مثال (2)** ارسم بيان الدالة $g(x)=|x|+3$ وقارن ذلك مع بيان الدالة الرئيسة $f(x)=|x|$ وحدد مجال الدالة ومداها.

نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

| x | f(x)=\|x\| | g(x)=\|x\|+3 |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 5 |
| 1 | 1 | 4 |
| 0 | 0 | 3 |
| -1 | 1 | 4 |
| -2 | 2 | 5 |

الجدول للاطلاع فقط

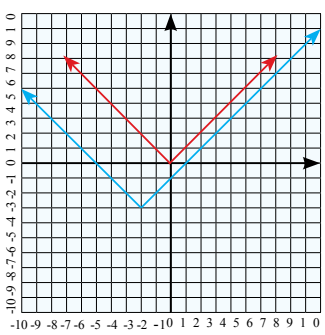


وعليه فإن كل قيمة للمتغير x تكون قيمة الدالة $g(x)=|x|+3$ أكبر من قيمة الدالة الرئيسة $f(x)=|x|$ بثلاث وحدات وبذلك فإن الرسم البياني للدالة $g(x)=|x|+3$ هو نفس الدالة الرئيسة $f(x)=|x|$ بعد سحبه للأعلى بثلاث وحدات.

مجال الدالة $g(x)$ هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية.

مدى الدالة $g(x)$ هو $\{y: y \geq 3\}$

**مثال (3)** ارسم بيان الدالة $g(x)=|x+2|-3$ وقارن ذلك مع بيان الدالة الرئيسية $f(x)=|x|$ وحدد مجال الدالة.نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

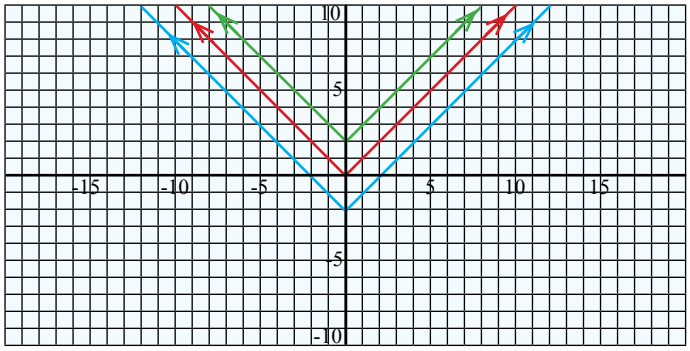


منحني الدالة $g(x)=|x+2|-3$ عبارة عن انسحاب الدالة بثلاث وحدات الى الأسفل ووحدتين الى جهة اليسار بالنسبة للدالة الرئيسة $f(x)=|x|$.

مجال الدالة $g(x)$ هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية.

مدى الدالة $g(x)$ هو $\{y: y \geq -3\}$

**مثال (4)** ارسم بيان كل من الدالة $f_1(x)=|x|+2$ والدالة $f_2(x)=|x|-2$ مع إيجاد المجال والمدى لهما وقارن ذلك مع الدالة الرئيسة $f(x)=|x|$.




نلاحظ أن لكل قيمة للمتغير x تكون قيمة الدالة $f_1(x)=|x|+2$ أكبر وينتج انسحاب بمقدار وحدتين الى اعلى الدالة $f(x)=|x|$. أما بالنسبة للدالة $f_2(x)=|x|-2$ فيكون انسحاباً بمقدار وحدتين الى اسفل الدالة.

مجال الدالة $f_1(x)$ و $f_2(x)$ هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية.

مدى الدالة $f_1(x)$ هو $\{y: y \geq 2\}$

مدى الدالة $f_2(x)$ هو $\{y: y \geq -2\}$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابةَ الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) الرسم البياني للدالة $y=|x-2|$ ثم انسحابه وحدتين الى الأسفل و 3 وحدات الى اليمين فإن الدالة الناتجة هي:

a) $y=|x-5|-2$ b) $y=|x-5|+2$ c) $y=|x+5|+2$ d) $y=|x+3|-2$

2) الرسم البياني للدالة $y=|x|+7$ يمثل أنسحاب للدالة الأم $y=|x|$ بمقدار:

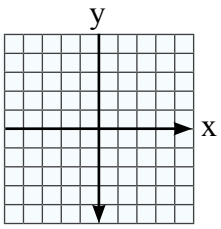
a ) x وحدات نحو الاعلى على محور 7 b) x وحدات نحو الاسفل على محور 7

c) x وحدات نحو اليسار على محور 7 d) x وحدات نحو اليمين على محور 7

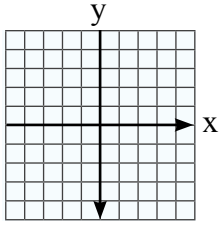
## التمرينات

**ضع جدول قيم لكل دالة، ثم ارسمها بيانيا.**

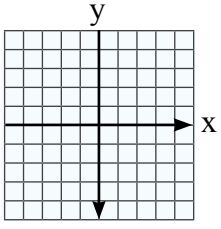
3) $f(x)=|x-1|$



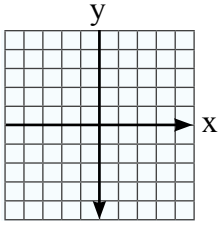

4) $f(x)=|x|-1$




5) $f(x)=2|x|+5$




6) $f(x)=3|x+2|$



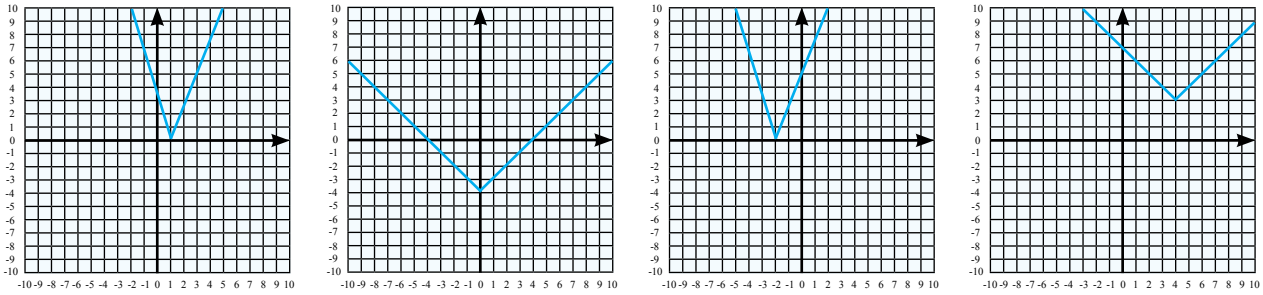
**اختر الحرف الدال على بيان كل دالة مما يأتي:**

7) $f(x) = |x| - 4$ _____

8) $f(x) = |3x - 4|$ _____

9) $f(x) = |x-4| + 3$ _____

10) $f(x) = |3x+5|$ _____



a b c d

**مثل كل دالة بيانيا مستخدما الدالة الرئيسة (الأم) والانسحاب.**

11) $y = |x-5|$

12) $y = |x| - 5$

13) $y = |x+6|$

14) $y = |x| - 6$

15) $y = |x+2| - 3$

**مثل كل دالة بيانيا مستخدما الدالة الرئيسة (الأم) والانعكاس.**

16) $y = 6 - |x|$

17) $y = -|x + 1|$

18) $y = -5 - |x|$

19) $y = -|x - 4|$

## مسائلُ حياتيةٌ



20) **أنواء جوية:** ضربت عاصفة ممطرة مدينة الموصل في العراق حيث بدأت العاصفة الممطرة برذاذ، ومن ثم تراكمت إلى أمطار غزيرة، ثم هدأت لتسقط مرة أخرى إلى رذاذ. يتم إعطاء معدل سقوط المطر r في الساعة بالدالة $r = -3|t-1| + 3$ حيث t يمثل الزمن بالساعة، ارسم مخططاً بيانياً للدالة وبين علاقتها بدالة الام $r = |t|$ .



21) **هندسة:** صُمِّمتْ واجهة خيمة التخييم بقياسات معينة على النحو التالي $y = -1.4|x - 2.5| + 3.5$ حيث يستخدم القدم كوحدة قياس x و y ويمثل المحور x الأرض. ارسم مخططاً بيانياً للدالة ومدى الدالة وبين علاقتها بدالة الام $y = |x|$ .

# اختبار الفصل

Chapter Test

**جد اوسع مجال للدوال الآتية:**

1 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

3 $f(x) = \sqrt[4]{x - 2}$

4 $f(x) = \frac{2}{x^2 - 25}$

5 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 3}}$

**جد مجموعة حل المتباينات الآتية:**

6 $4x^2 + 2x - 6 < 0$

7 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

8 $|x - 2| \leq 3$

9 $|x + 2| \leq -3$

10 $|x + 5| + 2 > 5$

11 $|x + 2| \geq -3$

**ارسم بيان الدوال الآتية:**

12 $f(x) = 2x + 3$

13 $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

14 $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

15 $f(x) = [[3x]]$

**ارسم بيان الدوال التالية وبين نوع التحويلة لكل دالة بالنسبة للدالة الأم :**

16 $y = x^2 + 6$

17 $y = (x - 4)^2$

18 $y = x^2 - 6$

19 $y = x^3 - 6$

20 $y = (x + 4)^3$

21 $y = (x - 4)^3$

22 $y = 7 - x^2$

23 $y = 8 - x^3$

24 $y = |x| + 4$

25 $y = |x| - 4$

26 $y = |x + 4|$

27 $y = |x - 4|$

28 $y = -|x - 4|$

29 $y = -|x + 4|$

30 $y = -|x| - 4$

الفصلُ 2

# المثلثات

# Triangles


الدرس [2-1] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا

الدرس [2-2] الدوال المثلثية

الدرس [2-3] حل المثلث القائم الزاوية

الدرس [2-4] مساحة المثلث والقطاع الدائري والقطعة الدائرية

الدرس [2-5] المتطابقات المثلثية




استخدم البابليون علم المثلثات واستخدموا النظام الستيني لقياس الزوايا منذ عصر قبل الميلاد وذلك أنهم قسموا الأعداد على أساس العدد 60.

# الاختبارُ القبليّ Pretest

**1** املأ الجدول الآتي :

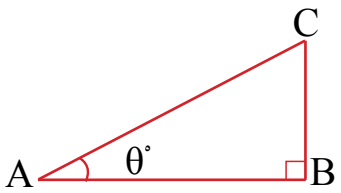
| θ | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|
| sin | | | | |
| cos | | | | |
| tan | | | | |

**2** اكتب مقلوب النسب المثلثية

| النسب المثلثية | sin θ | cos θ | tan θ |
|---|---|---|---|
| مقلوبها | | | |

**3** ارسم مثلثاً قائم الزاوية موضحاً عليه أسماء الأضلاع بالنسبة لزاوية أخرى فيه .

**4** اكتب النسب المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث .




**5** اثبت ان

$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

**6** جد قيمة

$(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2 \csc 90^\circ$

**7** ABC مثلث قائم الزاوية في B اذا كانت $\cos A = \frac{3}{5}$ فان $\tan C$ يساوي :

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

**8** اذا كانت $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فان قيمة الزاوية θ تساوي :

a) $45^\circ$ b) $60^\circ$ c) $90^\circ$ d) $30^\circ$

# الدرسُ [2-1]

## القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا
## Degree And Radian Measure of Angles

**تعلم**

**فكرة الدرس**

* التعرف إلى القياس الستيني للزوايا
* التعرف إلى القياس الدائري للزوايا
*التعرف إلى العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا

**المفردات**

* القياس الستيني
*القياس الدائري
*الزاوية الموجهة
*الزاوية الموجهة بالوضع القياسي



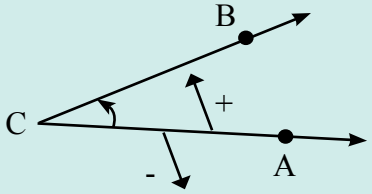
عندما يتحرك جسم يسير بسرعة منتظمة في مسار دائري نصف قطره r . فإن السرعة الخطية (S) لهذا الجسم هي نسبة طول القوس L الذي يقطعه الجسم الى الزمن t

أي $S = \frac{L}{t}$ أو $S = \frac{rQ}{t}$ حيث Q تمثل قياس زاوية دوران الجسم بالزوايا النصف قطرية

من المفيد قبل دراسة النظام الستيني والدائري تعرف الزاوية الموجهة ( Directed Angle ) والزاوية الموجهة بالوضع القياسي ( Stander Position ) .

**الزاوية الموجهة :** الزاوية ACB المحددة بضلعها الابتدائي $\overrightarrow{CA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{CB}$ ورأسها النقطة C تسمى الزاوية الموجهة المحصورة بين شعاعين وتكتب بأحدى الطريقيتين :

$\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ , $\angle ACB$ ويكون قياسها موجب ، اذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي عكس حركة عقارب الساعة ويكون قياسها سالب واذا كان اتجاه الدوران الضلع النهائي باتجاه حركة عقارب الساعة .

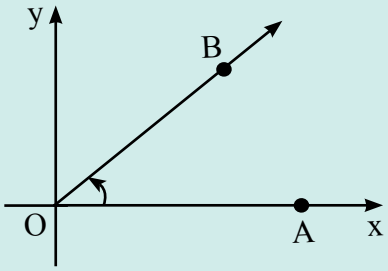



**الزاوية الموجهة بالوضع القياسي :**

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي هي التي :

i ) رأسها نقطة الاصل في المستوى الاحداثي .

ii ) ضلعها الابتدائي ينطبق على محور السينات x-axis الموجب اما ضلعها الآخر فهو حر في الدوران حول نقطة الاصل $360^\circ$ دورة كاملة




الزاوية AOB موجهة بالوضع القياسي .

الزاوية COB ليست بالوضع القياسي ولماذا ؟

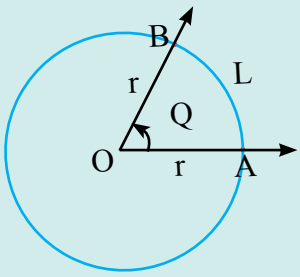
## [2-1-1] القياس الستيني Degree Measure

في **القياس الستيني Degree measure** نقسم دائرة إلى 360 قسماً متساوياً فيتكون 360 قوساً متساوياً كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة يسمى قياسها درجة في القياس الستيني ويرمز له بالرمز $1^\circ$

**القياس الدائري Radian measure:** هو نظام آخر لقياس الزوايا وحدة القياس فيه هي الزاوية نصف القطرية وهي قياس للزاوية التي رأسها في مركز الدائرة ويقابلها قوس $(\overset{\frown}{AB})$ يكون طوله مساوياً لنصف قطر تلك الدائرة.

ليكن طول القوس المقابل للزاوية المركزية AOB يساوي L وحدة طول

وليكن طول نصف قطر الدائرة يساوي r وحدة طول وكان L= r فإن $m\angle AOB$ بالقياس الدائري يساوي 1 زاوية نصف قطرية




$$\therefore \text{قياس الزاوية المركزية بالقياس الدائري} = |Q| = \frac{L}{r} = \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{نصف قطر الدائرة}}$$

**العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري**

درست سابقا ان محيط الدائرة $= 2\pi r$، وبما ان

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

حيث ان $2\pi$ زاوية نصف قطرية تكافيء الزاوية $360^\circ$ .

$\pi$ زاوية نصف قطرية تكافيء الزاوية $180^\circ$. $\Leftarrow$

$\frac{\pi}{180^\circ} = 1^\circ$ زاوية نصف قطرية $\Leftarrow$

وبصورة عامة:

أ) اذا كان قياس زاوية موجهة =Q زاوية نصف قطرية فإن $Q = \frac{D^\circ \times \pi}{180^\circ}$

ب) اذا كان قياس زاوية موجهة $= D^\circ$

فإن $D^\circ = \frac{Q \times 180^\circ}{\pi}$

ومنه نستنتج ان $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$ وتستخدم هذه العلاقة لتحويل القياس الدائري الى الستيني وبالعكس.

**مثال (1)** حوِّل الزوايا التالية الى القياس الدائري

ii) $120^\circ$

باستعمال العلاقة $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$

التعويض $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{120^\circ}$

زاوية نصف قطرية $Q = \frac{2\pi}{3}$

i) $75^\circ$

باستعمال العلاقة $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$

التعويض $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{75^\circ}$

زاوية نصف قطرية $Q = \frac{5\pi}{12}$

**مثال (2)** حوِّل قياس الزوايا التالية الى القياس الستيني

ii) $\frac{3\pi}{2}$

باستعمال العلاقة $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{D^\circ}$

$D^\circ = 270^\circ$

i) $\frac{4\pi}{3}$

باستعمال العلاقة $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$

بالتعويض $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{D^\circ}$

بضرب الطرفين في $\frac{1}{\pi}$ $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3\,D^\circ}$

$\frac{1}{180^\circ} = \frac{4}{3D^\circ} \Rightarrow D^\circ = \frac{4 \times 180^\circ}{3} = 240^\circ$

**مثال (3)** زاوية مركزية طول قوسها 12cm وطول نصف قطر دائرتها 16cm فما قياسها الستيني؟

زاوية نصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{3}{4} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 42.954^\circ$$

**مثال (4)** زاوية مركزية طول قوسها 14cm وطول نصف قطر دائرتها 18cm فما قياسها الستيني؟

زاوية نصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{7}{9}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{7}{9} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 44.545^\circ$$

**مثال (5)** زاوية مركزية قياسها $30^\circ$ فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 6cm؟

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

زاوية نصف قطرية

$$|Q| = \frac{\pi}{6}$$

$$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{L}{6} \Rightarrow L = \pi = 3.142\text{cm}$$

**مثال (6)** دائرة فيها زاوية مركزية قياسها $21^\circ$ وطول القوس المقابل لها يساوي 3cm. جد طول نصف قطرها.

نستعمل العلاقة لإيجاد قياس الزاوية بالتقدير الدائري

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{21^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$Q = \frac{21^\circ \pi}{180^\circ}$$

$$\therefore Q = \frac{7\pi}{60}$$

$$|Q| = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{7\pi}{60} = \frac{3}{r} \Rightarrow r = \frac{180}{7\pi} = 8.181\text{cm}$$

**مثال (7)** في فقرة تعلم احسب نصف قطر لعبة القطار في مدينة الالعاب اذا كانت الدورة الواحدة لها تستغرق 22sec وبسرعة 2m / sec.

نستعمل العلاقة لإيجاد قياس الزاوية بالتقدير الدائري

$S = \frac{L}{t} \Rightarrow S = \frac{rQ}{t}$

$S = 2m / sec \ , r = ? \ , Q = 2\pi \ , t = 22 \ sec$

$2 = \frac{r(2\pi)}{22} \Rightarrow r = \frac{2 \times 22}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{22}{\frac{22}{7}} \Rightarrow r = 7 \ m$ نصف قطر لعبة القطار

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) القياس الدائري للزاوية $225^\circ$ هو:

a) $\frac{5^\circ}{4}$ , b) $\frac{4\pi}{5}$ , c) $\frac{5\pi}{4}$ , d) $225\pi$

2) القياس الستيني للزاوية نصف القطرية $\frac{3\pi}{2}$ هو:

a) $90^\circ$ , b) $360^\circ$ , c) $270^\circ$ , d) $60^\circ$

## التمرينات

**حوّل الى القياس الدائري كلاً من قياس الزوايا الآتية:**

3) $10^\circ$ 4) $50^\circ$ 5) $85^\circ$ 6) $100^\circ$

7) $300^\circ$ 8) $270^\circ$ 9) $250^\circ$ 10) $120^\circ$

**حوّل الى القياس الستيني كلاً من قياس الزوايا الآتية:**

11) $\frac{3\pi}{4}$ 12) $\frac{2\pi}{5}$ 13) $\frac{\pi}{2}$ 14) $\frac{5\pi}{6}$

15) $\frac{4\pi}{7}$ 16) $\frac{3\pi}{5}$ 17) $\frac{2\pi}{3}$ 18) $4\pi$

19) ما قياس الزاوية النصف قطرية التي تقابل قوساً طوله يساوي $\pi$ r وحدة طول في دائرة نصف قطرها r وحدة طول ؟

20) مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.45 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منهما بالقياس الستيني؟

21) زاويتان مجموعهما يساوي $\frac{\pi}{6}$ وفرقهما يساوي $6^\circ$، فما مقدار هاتين الزاويتين بالقياس الستيني؟

## مسائلُ حياتيةٌ



22) ما قياس القوس المقابل للزاوية النصف قطرية $\frac{3\pi}{2}$ في إطار دراجة قطرها يساوي 40cm؟

23) ملعب للركض على شكل دائرة نصف قطرها 60m، رَكضَ أحد المتنافسين فيه مسافة 70m بشكل قوس، فما قياس الزاوية المركزية المقابلة له بالقياس الستيني؟

# الدرسُ [2-2]

## الدوال المثلثية — Trigonometric Functions

**فكرة الدرس**

* التعرف إلى دائرة الوحدة
* التعرف إلى القياس الرئيس للزاوية و الدالة الدورية والدورة
* السعة
* زاوية الإسناد

**المفردات**

* الدورة
* التردد
* السعة

**تعلم**

الدوال المثلثية لها تطبيقات كثيرة في الفيزياء والهندسة والاجهزة الطبية وكذلك في تصميم محطات مترو الانفاق وعمل نافورات المياه في الحدائق العامة حيث نلاحظ في الصورة المجاورة الاقواس المختلفة التي تمثلها النافورة وهي تمثل جزءاً من دالة $\sin\theta$.



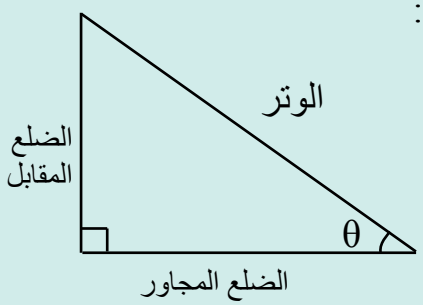
## [2-2-1] النسب المثلثية — Trigonometric Ratios

من النسب المثلثية الاساسية ما يأتي :

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



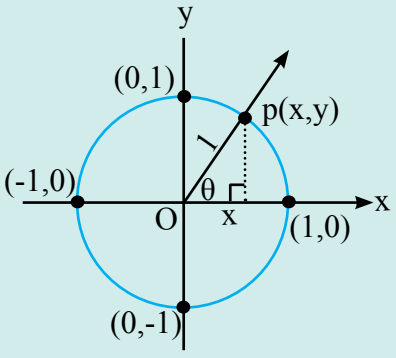

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

لاحظ أن $\csc\theta$ هو مقلوب $\sin\theta$ وإن $\sec\theta$ هو مقلوب $\cos\theta$ وإن $\cot\theta$ هو مقلوب $\tan\theta$.

**دائرة الوحدة ( Unit Circle ) :** هي دائرة مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة ومنها نستنتج النسب المثلثية للزوايا المحورية الأساسية .




| $\theta$ دائري | $\theta$ ستيني | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $0^\circ$ | 0 | 1 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $90^\circ$ | 1 | 0 | غير معرفة |
| $\pi$ | $180^\circ$ | 0 | -1 | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $270^\circ$ | -1 | 0 | غير معرفة |
| $2\pi$ | $360^\circ$ | 0 | 1 | 0 |

**النقطة المثلثية ( Triangle Point ) :** هي النقطة $p(x,y)$ الناتجة من تقاطع الضلع النهائي للزاوية $\theta$ مع دائرة الوحدة حيث

$$p(x, y) = (\cos\theta , \sin\theta) .$$

باستعمال النقطة المثلثية ودائرة الوحدة يمكن تعريف الدوال المثلثية وإيجاد المجال والمجال المقابل لها

**اولاً -** دالة الجيب ($\sin\theta$) دالة مجالها R ومجالها المقابل [-1,1] حيث ان $\sin: R \rightarrow [-1,1]$:

$y = \sin\theta \quad \forall\, \theta \in R$ , y هو الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية

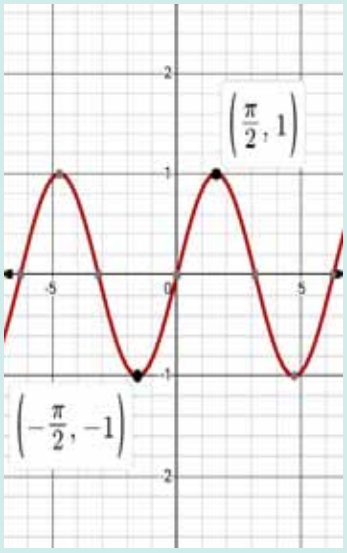
خواص دالة الجيب ( $\sin\theta$ ) من $0^\circ$ الى $360^\circ$

1 - منحني الدالة يقطع محور السينات بالزوايا $0 , \pi , 2\pi$

2 - دالة دورية كل دورة تساوي $2\pi$

3 - التردد يساوي $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ أي التردد $= \frac{1}{2\pi}$

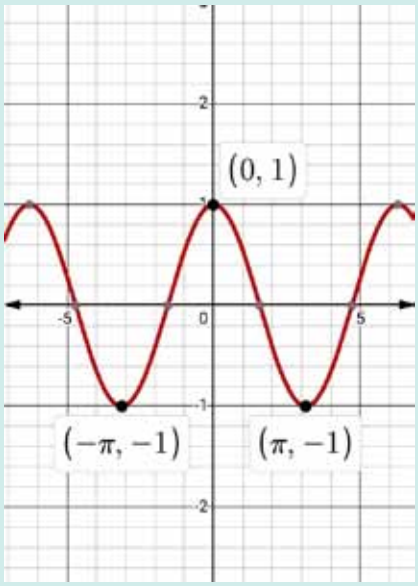
4 - السعة $= \frac{\text{اكبر قيمة - أصغر قيمة}}{2}$ أي السعة $= \frac{1-(-1)}{2}$ أي السعة $= 1$




| $\theta$ | $-2\pi$ | $\frac{-3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

**ثانياً -** دالة الجيب تمام ( $\cos\theta$ ) دالة مجالها R ومجالها المقابل [-1,1] حيث ان $\cos: R \rightarrow [-1,1]$ :

$x = \cos\theta \quad \forall\, \theta \in R$ هي الإحداثي السيني للنقطة المثلثية،




| $\theta$ | $-2\pi$ | $\frac{-3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

خواص دالة الجيب تمام ( $\cos\theta$ ) من $0^\circ$ الى $360^\circ$

1 - منحني الدالة يقطع محور السينات بالزوايا $\frac{\pi}{2}$ , $\frac{3\pi}{2}$

2 - دالة دورية كل دورة تساوي $2\pi$

3 - التردد يساوي $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ أي التردد $= \frac{1}{2\pi}$

4 - السعة $= \frac{\text{اكبر قيمة - اصغر قيمة}}{2}$ أي السعة $= \frac{1-(-1)}{2}$ أي السعة $= 1$

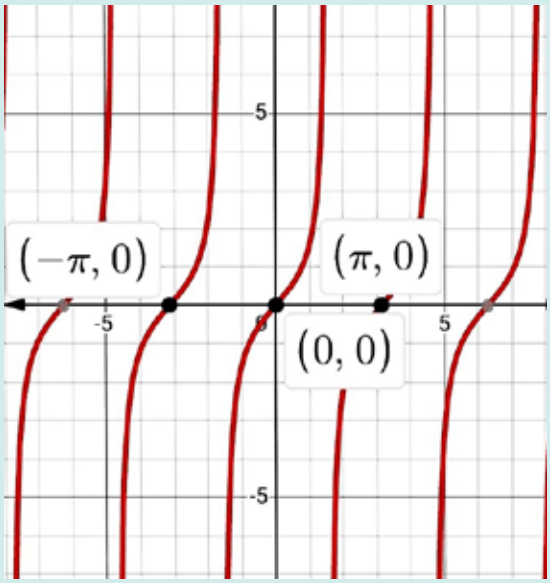
**ملاحظة :** في هذه المرحلة سوف نكتفي بخواص دالة $\sin\theta$ ودالة $\cos\theta$

**ثالثاً -** دالة الظل ( $\tan\theta$ )حيث ان:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

مجالها هو $\{\theta: \theta \in R , \cos\theta \neq 0\}$ ومجالها المقابل هو R

$$\tan : \{\theta: \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \rightarrow R$$

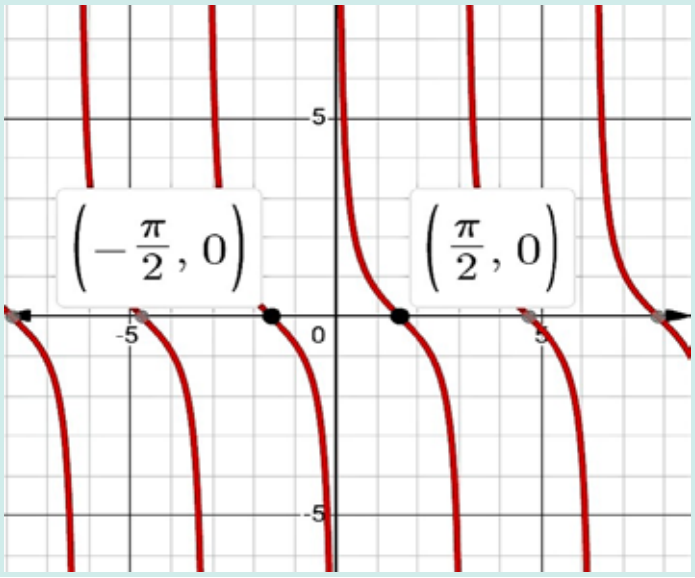



**رابعاً -** دالة الظل تمام ( $\cot\theta$ )

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

مجالها هو $\{\theta: \theta \in R , \sin\theta \neq 0\}$ ومجالها المقابل هو R

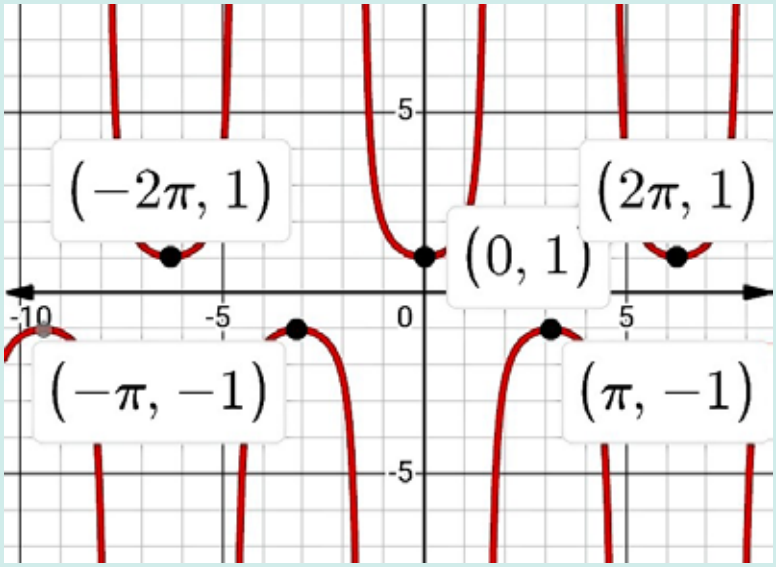
$$\cot : \{\theta: \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \rightarrow R$$



**خامساً ـ** دالة القاطع $(\sec\theta)$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ,

مجالها هو $\{\theta: \theta \in R , \cos\theta \neq 0\}$ ومجالها المقابل هو R

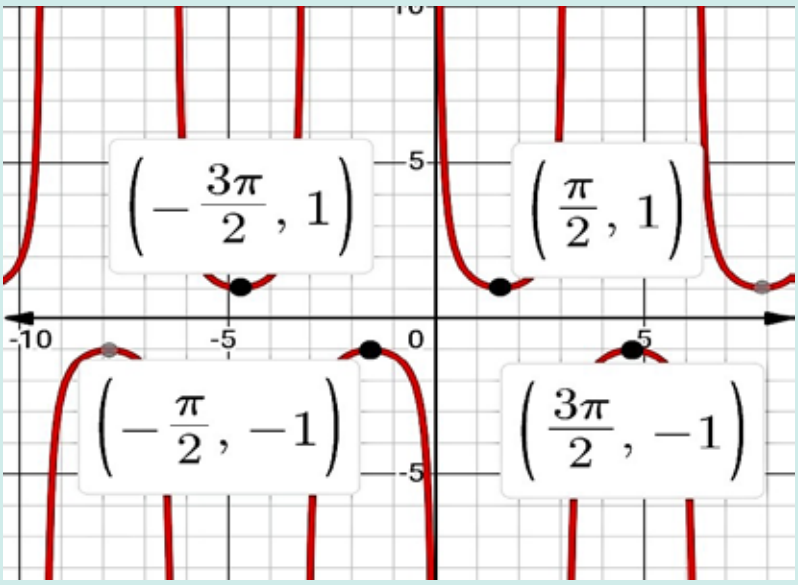
$$\sec : \{\theta: \theta \in R , \cos\theta \neq 0\} \rightarrow R$$




**سادساً ـ** دالة القاطع تمام $(\csc\theta)$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

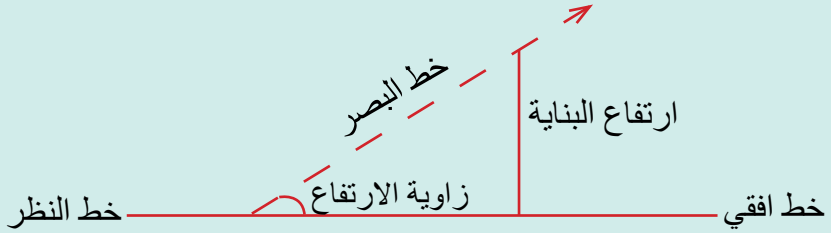
مجالها هو $\{\theta: \theta \in R , \sin\theta \neq 0\}$ ومجالها المقابل هو R

$$ces : \{\theta: \theta \in R , \cos\theta \neq 0\} \rightarrow R$$

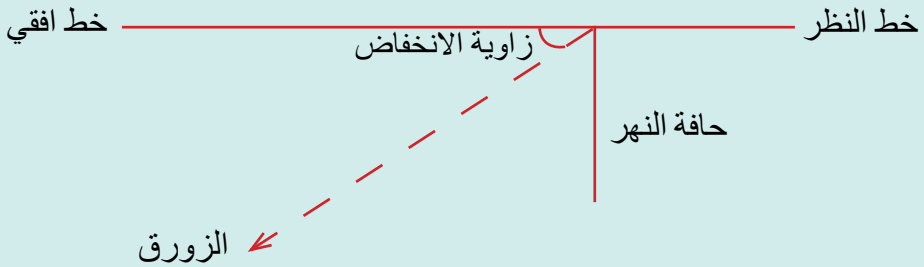


## [2-2-2] زوايا الارتفاع والانخفاض Angles of Elevation and Depression

**اولاً - زاوية الارتفاع Angle of elevation:** هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي (مستوى العين) وخط النظر إلى جسم يقع أعلى من مستوى العين.




**ثانياً - زاوية الانخفاض Angle of depression :** هي الزاوية التي يجب ان ينظر الشخص من خلالها الى الاسفل بدءًا من المستوى الافقي لكي يتمكن من رؤية الجسم مثل شخص يقف على حافة النهر وينظر الى الزورق بزاوية انخفاض مقدارها $35^\circ$ كما في الشكل .




تعتمد مسائل الارتفاع والانخفاض على الزاوية المعطاة وتطبيق النسب المثلثية في حل هذه المسائل .

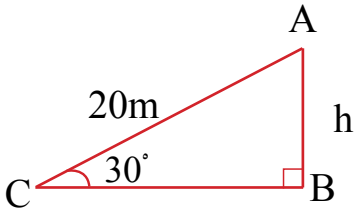
**مثال (1)**



سلّم كهربائي في أحد المراكز التجارية طوله 20m ويصنع زاوية مع الارض ( خط افقي ) مقدارها $30^\circ$ جد ارتفاع السلم عن الأرض .

ليكن ارتفاع السلم هو h وحدة طول

المثلث ABC قائم الزاوية في B




$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

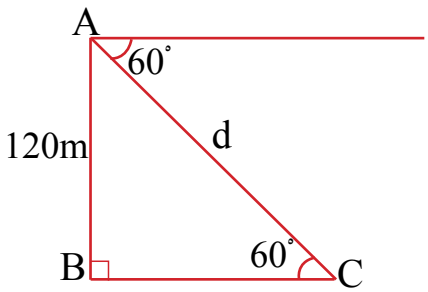
$$\Rightarrow h = \frac{20}{2} = 10 \text{ m}$$

**مثال (2)**



كاميرا للنقل التلفزيوني في ملعب البصرة على ارتفاع 120m وكانت زاوية انخفاض التصوير على نقطة من ارض الملعب $60^\circ$ فما هي المسافة بين الكاميرا وبين نقطة بدء المباراة .

من الشكل لاحظ ان زاوية الارتفاع = زاوية الانخفاض ( بالتبادل)




نفرض ان المسافة بين الكاميرا وتلك النقطة هي d

$\Delta ABC$ قائم الزاوية في B

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{120}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{240}{\sqrt{3}} \approx 138.6 \text{ m}$$

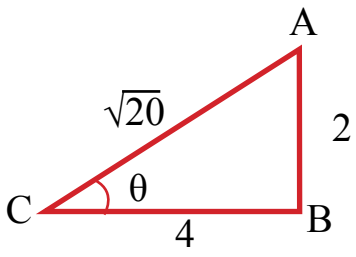
**الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) اذا كانت النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ هي نقطة مثلثية فان $\tan\theta$ يساوي :

(a) 1 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2) في المثلث ABC المجاور قيمة $\cos\theta$ هي :




(a) $\frac{2}{\sqrt{20}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{20}}$ (c) $\frac{\sqrt{20}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{20}}{2}$

## التمرينات

3) ارسم الدوال المثلثية الاتية :

i ) $y = 2 \sin \theta$ ii ) $y = 2 \cos \theta$ iii ) $y = 2 \tan \theta$

iv ) $y = 2 \sec \theta$ v ) $y = 2 \csc \theta$ vi ) $y = 2 \cot \theta$

4) جد النسب المثلثية الآتية :

i ) $\sin \frac{\pi}{3}$ ii ) $\tan \frac{\pi}{4}$ iii ) $\cos \frac{\pi}{6}$

iv ) $\sin \frac{\pi}{6}$ v ) $\cos \frac{\pi}{3}$ vi ) $\tan \frac{\pi}{3}$

## مسائلُ حياتيةُ

5) يقف عمار امام لوحة اعلانات موضوعة على بناية وينظر لها فاذا كانت المسافة بين اللوحة ونقطة وقوف عمار هي 20 متراً وتصنع زاوية $60^\circ$ ، جد ارتفاع اللوحة .



6) ينحدر متسابق دراجات على منحدر طوله 90m بزاوية انحدار $45^\circ$ ، فما هو ارتفاع المنحدر ؟



# الدرسُ [2-3]

## حلّ المثلث القائم الزاوية — Solving of Right Angled Triangle

**فكرة الدرس**

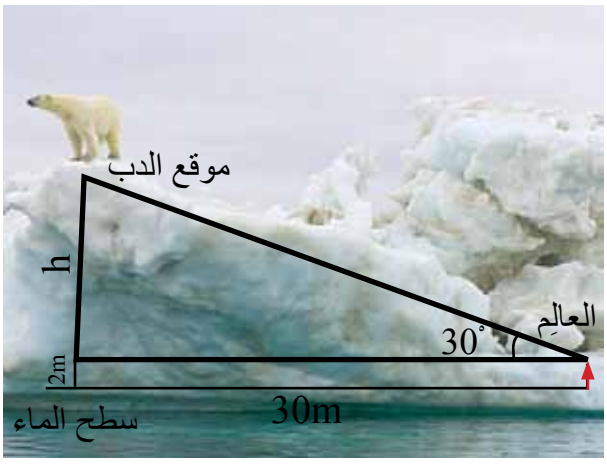
*ايجاد القيم المجهولة لطول الاضلاع والزاويا في المثلث القائم الزاوية.

**المفردات**

* مثلث قائم الزاوية
* الوتر
* الضلع المقابل
* الضلع المجاور
* مبرهنة فيثاغورس

**تعلم**

يقوم احد العلماء بتصوير احد الدببة البيضاء الذي يقف على جبل جليدي وسط الماء . لحساب أرتفاع الدب عن سطح الماء قاس العالم الزاوية التي يشكلها خط النظر الى الدب مع خط أفقي فوجد أنها $30^\circ$ . فكيف يحسب العالم موقع الدب عن سطح الماء حيث ان المسافة بين العالم والتلة الجليد هو 30m وان آلة التصوير على أرتفاع 2m عن سطح الماء .




يقصد بحلّ المثلث القائم الزاوية هو ايجاد قياس الزوايا وطول الاضلاع المجهولة باستخدام النسب المثلثية ومبرهنة فيثاغورس .

## [2-3-1] حلّ المثلث القائم الزاوية اذا علم منه طول ضلعين
## Solve a Right Triangle if Two Side Lengths are Known

i) باستعمال مبرهنة فيثاغورس نجد طول الضلع الثالث.

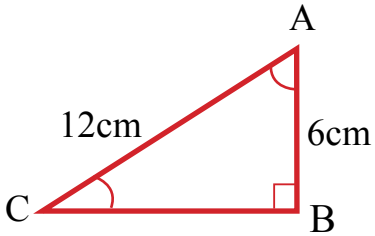
ii) باستعمال النسب المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ) نجد قياس الزاوية الحادة .

iii) نجد الزاوية الثالثة باستعمال الزاوية القائمة .

**مثال (1)**

حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في B وطول الضلع $AB = 6cm$ وطول الضلع $AC = 12cm$ .

نرسم المثلث ABC




$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(12)^2 = (6)^2 + (BC)^2$$
$$144 = 36 + (BC)^2$$
$$BC = \sqrt{108}$$
$$= 6\sqrt{3}\ cm$$
$$\Rightarrow \cos C = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow m\angle C = 30^\circ$$
$$\Rightarrow m\angle A = 90^\circ - 30^\circ$$
$$= 60^\circ$$

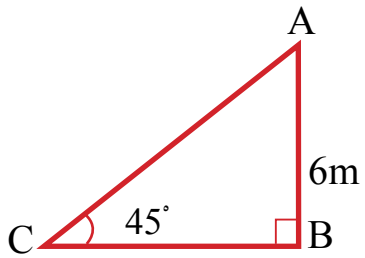
## [2-3-2] حل مثلث قائم الزاوية اذا علم منه زاوية وضلع
## Solving of Right Angled Triangle if one side length and one angle are known

i) باستعمال احدى النسب المثلثية نجد الضلع الثاني .

ii) مباشرة من مبرهنة فيثاغورس نجد الضلع الثالث .

iii) نجد الزاوية الثالثة باستعمال الزاوية القائمة .

**مثال (2)** حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا علمت أن طول الضلع $AB = 6m$ ، $m\angle C = 45^\circ$.




نرسم المثلث ABC

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{CB}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{6}{CB} \Rightarrow CB = 6\ m$$

من نظرية فيثاغورس

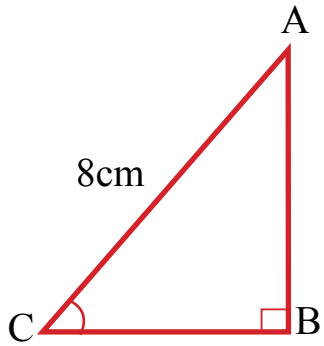
$$(CA)^2 = (AB)^2 + (CB)^2$$

$$(CA)^2 = 36 + 36 \Rightarrow CA = 6\sqrt{2}\ m$$

$$m\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

**مثال (3)** حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا علمت أن طول الضلع $AC = 8cm$ ،

$m\angle C = 60^\circ$ .




نرسم المثلث ABC

$$\cos 60^\circ = \frac{CB}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CB}{8} \Rightarrow CB = 4\ cm$$

من نظرية فيثاغورس

$$(AB)^2 = (CA)^2 - (CB)^2$$

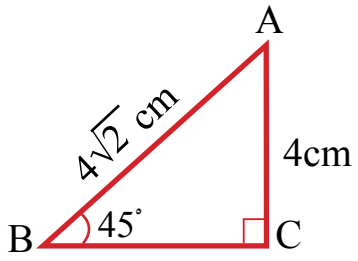
$$= 64 - 16 = 48\ cm$$

$$\Rightarrow AB = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$m\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

**مثال (4)**

المثلث ABC اطوال اضلاعه $AB = 4\sqrt{2}$ cm ، $AC = BC = 4$ cm .




i) اثبت ان المثلث قائم الزاوية في C

ii) جد قيم الزاويتين الحادتين فيه .

لاثبات ان المثلث قائم الزاوية يجب ان نثبت $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

i ) $L.H.S = (AB)^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

$R.H.S = (AC)^2 + (BC)^2 = (4)^2 + (4)^2 = 32$

$L.H.S = R.H.S = 32$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

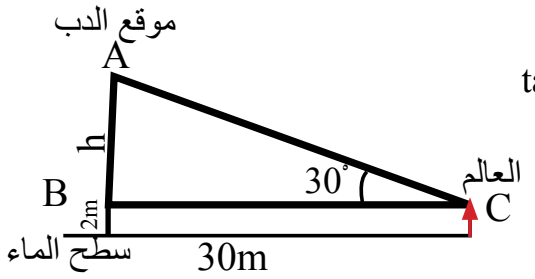
ii) بما ان المثلث قائم الزاوية في C ومتساوي الساقين

اذن $m\angle A = m\angle B = 45^\circ$

**مثال (5)**

لحلِّ السؤال في تعلم نفرض ان موقع الدب من الخط الافقي لقياس الزاوية هو h .لذا فإنّ موقع الدب عن سطح الماء هو $h + 2$ .

نرسم المثلث ABC




$$\tan\theta = \frac{AB}{CB}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

$$\Rightarrow h \approx \frac{30}{1.732} = 17.32\text{m}$$

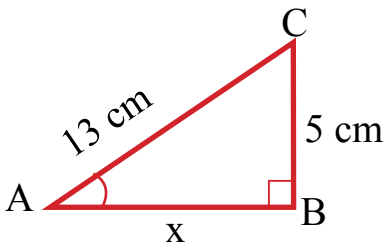
∴ موقع الدب عن سطح الماء هو

$17.32 + 2 = 19.32$ m

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) ما قيمة x في المثلث ABC :




(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14

2) اذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ فان قيمة $\theta$ هي :

(a) $30^\circ$ (b) $45^\circ$ (c) $60^\circ$ (d) $90^\circ$

## التمرينات

3) اذا كان $\tan 27^\circ = 0.5$ في مثلث قائم الزاوية جد:

$\sin 27^\circ$ , $\cos 27^\circ$ , $\sin 63^\circ$ , $\cos 63^\circ$

4) حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في B وكان فيه $AB = 8$ cm , $AC = 16$ cm

5) حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في C اذا علمت ان $m\angle CAB = 60^\circ$ وان $AB = 20$ cm

6) حلّ المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا علمت ان $m\angle A = 45^\circ$ وان $AB = 4$ cm

## مسائلُ حياتيةٌ



7) قارب فيه شراع على شكل مثلث قائم الزاوية واحدى زواياه الحادة $\theta$، حيث $\sin\theta = \frac{1}{2}$ وارتفاع الشراع فيه 8m ، جد قيم الزوايا والاضلاع المجهولة فيه .



8) صنع مازن رفًّا على شكل مثلث قائم الزاوية فاذا كانت احدى زوايا المثلث الحادة $\theta$ حيث $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}}$ ، جد طول الاضلاع والزوايا المجهولة فيه .

# الدرسُ [2-4]

## مساحة المثلث والقطاع الدائري والقطعة الدائرية
## Triangle Area and Circular Sector and Circular Segment



**تعلم**

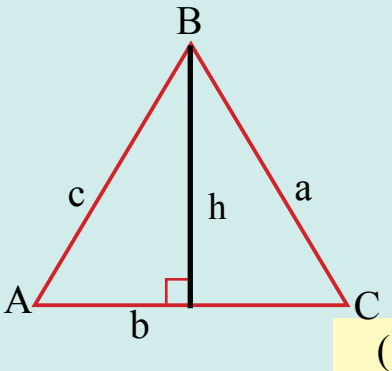
عمل مجسم خشبي لحمل سنادين نباتات الظل وكان جانبا الهيكل على شكل مثلث متساوي الساقين فيه قياس الزاوية المقابلة لقاعدة المثلث هو $30^\circ$ وطول كل من الضلعين المجاورين للزاوية هو 2m ، جد مساحة المثلث .

**فكرة الدرس**
* ايجاد مساحة مثلث
* التعرف الى القطاع الدائري
* ايجاد مساحة القطاع الدائري
* التعرف الى القطعة الدائرية
* ايجاد مساحة القطعة الدائرية

**المفردات**
* القطاع الدائري
* القطعة الدائرية

## [2-4-1] ايجاد مساحة المثلث — Finding the area of Triangle

في المثلث ABC الذي أطوال اضلاعه a,b,c هل يمكن ايجاد مساحة المثلث اذا علمت طول ضلعيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما ؟




$\sin A = \frac{h}{c}$ اي ان $h = c \sin A$

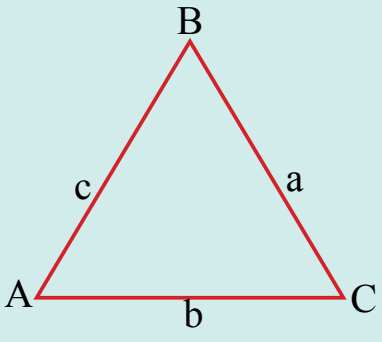
مساحة المثلث $ABC = \frac{1}{2}bh$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} b ( c \sin A )$ ( بالتعويض عن قيمة h )

$= \frac{1}{2} b \ c \sin A$

فتكون مساحة المثلث (اذا علم طولي ضلعين فيه والزاوية المحصورة بينهما ) تساوي نصف حاصل ضرب طول الضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

اي ان مساحة المثلث ABC الذي طول اضلاعه a,b,c تساوي

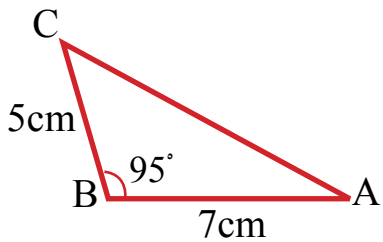



i) $\frac{1}{2} bc \sin A$

ii) أو $\frac{1}{2} ac \sin B$

iii) أو $\frac{1}{2} ab \sin C$

**مثال (1)** جد مساحة المثلث ABC في الشكل المجاور اذا كان $\sin 95^\circ = 0.996$ :

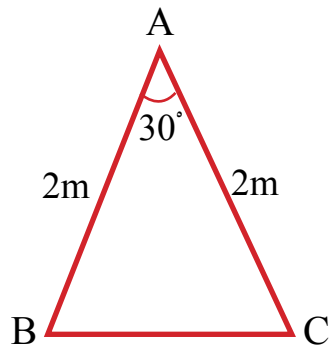



$\sin 95^\circ = 0.996$ ، $a = 5cm$ , $c = 7\ cm$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} ac \ \sin B$

$= \frac{1}{2} (5)(7)\ (0.996) = 17.43\ cm^2$

**مثال (2)** (من فقرة تعلم ) :




$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2}\,(2)\,(2)\sin 30^{\circ}$$

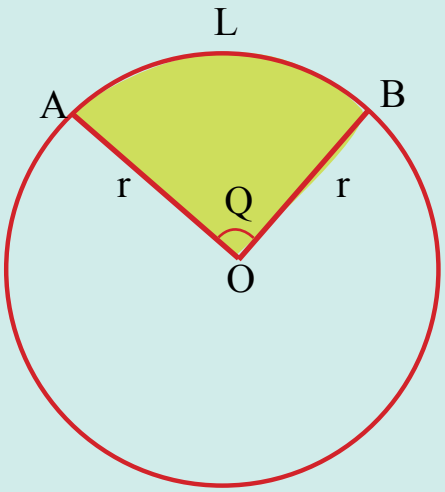
$$= \frac{1}{2}\,(2)\,(2)\,(\frac{1}{2}) = 1\ m^2$$

## [2-4-2] القطاع الدائري Circular Sector

**القطاع الدائري:** هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس.

الشكل المجاور يوضح القطاع الدائري المحدد بين نصفي القطرين r والقوس L (المساحة ذات اللون الاخضر).

الزاوية AOB تسمى بالزاوية المركزية للقطاع الاصغر حيث ان قياسها يكون اقل من $180^{\circ}$




مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2}\, L\, r$ .....1

واذا كان قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالقياس الدائري Q

حيث ان:

$$L = Q\, r \Rightarrow Q = L/r$$

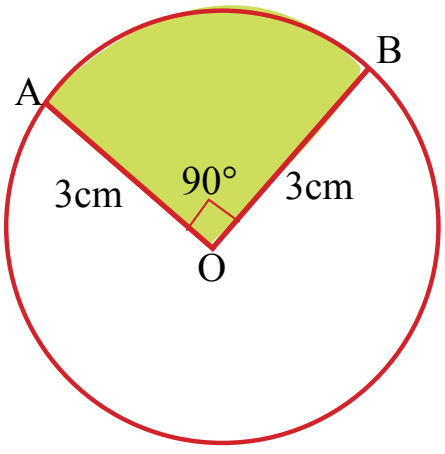
وبالتعويض عن قيمة L في 1 نحصل على

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2}\, Q\, r^2$ .....2

ويكون محيط القطاع الدائري $= 2r + L$

حيث r هو نصف القطر و L هو طول قوس القطاع الدائري.

**مثال (3)** جد مساحة القطاع الدائري في الشكل المجاور




$$\frac{Q}{D^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow \frac{Q}{90^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{2}$$

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2}\, Qr^2$

$$\frac{1}{2}\,(\frac{\pi}{2})\,(9) =$$

$$7.065\text{cm}^2 =$$

**مثال (4)** جد مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته المركزية $2\pi$ و نصف قطره 5cm

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} Q\, r^2$

$= \frac{1}{2} (2\pi)\, (5)^2$

$(3.14).(25) = 78.5cm^2$

**مثال (5)** اذا كانت مساحة قطاع دائري تساوي $6cm^2$ وطول قوسه 4cm جد :

اولا: طول نصف قطر دائرة

ثانيا: محيطه

ثالثا: قياس الزاوية بالقياس الستيني

**اولا:** مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} Lr$

$6 = \frac{1}{2} (4)\, r$

$6 = 2r$

$r = 3cm$

**ثانيا:** محيط القطاع الدائري $= 2r + L$

$2(3) + 4 = 10cm$

**ثالثا:** زاوية نصف قطرية $| Q | = \frac{L}{r} = \frac{4}{3} = 1.333$

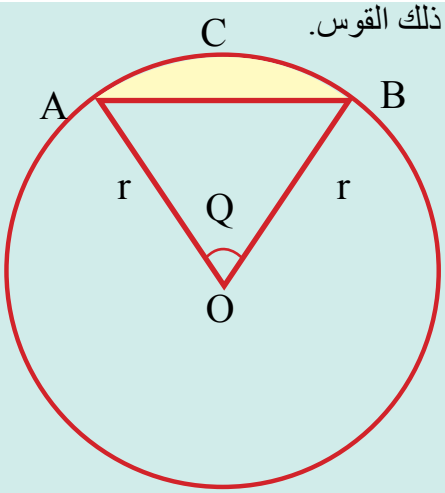
$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$D^\circ = \frac{180 \times 1.333}{3.14}$

$= 76^\circ.414$

## [2-4-3] القطعة الدائرية Circular Segment

**القطعة الدائرية:** هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها وتر مار بنهايتي ذلك القوس.




لايجاد مساحة القطعة الدائرية من الشكل المجاور

مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع (OACB) – مساحة المثلث OAB

اذن مساحة القطعة ACB $= \frac{1}{2} Q\, r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$

مساحة القطعة ACB $= \frac{1}{2} r^2 ( Q - \sin Q )$

حيث r هو نصف قطر الدائرة وQ زاوية القطعة بالقياس الدائري.

**مثال (6)** جد مساحة قطعة دائرية في دائرة طول نصف قطرها 10cm وقياس زاويتها $60^\circ$.

$$\frac{Q}{D} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Q \approx 1.048$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 60)$$

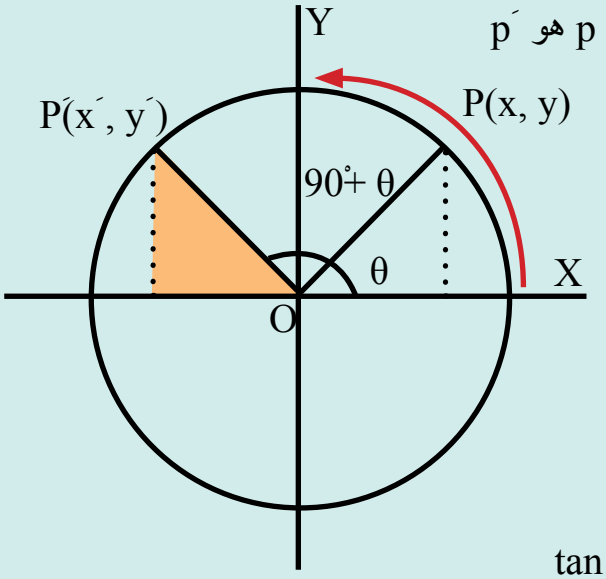
$$= \frac{1}{2} (100) (1.048 - 0.866)$$

$$= 50 \ (0.182) = 9.1 cm^2$$

## [2-4-4] الزوايا المنتسبة Associated (Reference) Angles

تعلمت سابقاً الانعكاس وتعلمت كيفية ايجاده على المحاور . وستلاحظ انعكاس الزواية θ في الربعين الاول والثاني .

**1 - العلاقة بين الزاوية θ والزاوية $90^\circ + \theta$**




p´ هو انعكاس p

$$op = op´ = 1$$

$$y´ = x$$

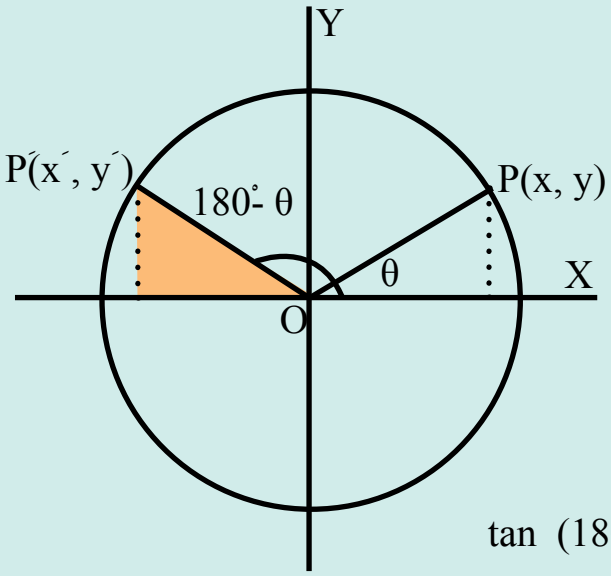
$$x´ = -y$$

$$\sin (90^\circ + \theta) = \frac{y´}{1} = \frac{x´}{1} = \cos \theta$$

$$\cos (90^\circ + \theta) = \frac{x´}{1} = \frac{-y}{1} = -\sin \theta$$

$$\tan (90^\circ + \theta) = \frac{\sin (90^\circ + \theta)}{\cos (90^\circ + \theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

**2 - العلاقة بين الزاوية θ والزاوية $180^\circ - \theta$**




$$op = op´ = 1$$

$$x´ = -x$$

$$y´ = y$$

$$\sin (180^\circ - \theta) = \frac{y´}{1} = \frac{y}{1} = \sin \theta$$

$$\cos (180^\circ - \theta) = \frac{x´}{1} = \frac{-x}{1} = -\cos \theta$$

$$\tan (180^\circ - \theta) = \frac{\sin (180^\circ - \theta)}{\cos (180^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

| | |
|---|---|
| $\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$ | $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ |
| $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$ | $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ |
| $\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$ | $\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$ |

**مثال (7)**

جدالنسب المثلثية للزاوية $150^\circ$ :

**1)** $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)$

$$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

**2)** $\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)$

$$=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**3)** $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)$

$$=-\cot 60^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**4)** $\cot 150^\circ=\cot(90^\circ+60^\circ)$

$$=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

**5)** $\sec 150^\circ=\sec(90^\circ+60^\circ)$

$$=-\csc 60^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

**6)** $\csc 150^\circ=\csc(90^\circ+60^\circ)$

$$=\sec 60^\circ=2$$

وكذلك يمكن ايجاد الحل بطريقة اخرى :

**7)** $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

**8)** $\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)$

$$=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**9)** $\tan 150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)$

$$=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**10)** $\cot 150^\circ=\cot(180^\circ-30^\circ)$

$$=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

**11)** $\sec 150^\circ=\sec(180^\circ-30^\circ)$

$$=-\sec 30^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

**12)** $\csc 150^\circ=\csc(180^\circ-30^\circ)$

$$=\csc 30^\circ=2$$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) مساحة القطعة الدائرية تكون ..... مساحة القطاع الدائري المحدد بنفس القوس في الدائرة:

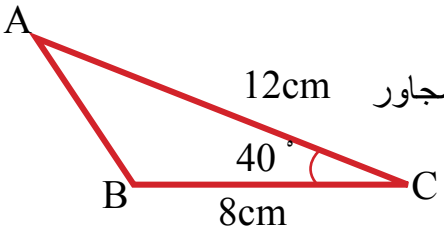
(a) اكبر من (b) اصغر من (c) مساوية (d) $2\pi$

2) أي الدوال التالية نحتاجها لايجاد مساحة القطعة الدائرية:

(a) $\cos x$ (b) $\tan x$ (c) $\cot x$ (d) $\sin x$

## التمرينات

3) جد مساحة المثلث ABC اذا كان $\sin 40^\circ \approx 0.642^\circ$ في الشكل المجاور




4) جد مساحة المثلث المتساوي الساقين الذي قياس الزاوية بين ضلعيه المتساويين $120^\circ$ ، وطول ضلعيه المتساويين 12cm

5) جد النسب المثلثية للزاوية $135^\circ$ بطريقتين .

6) جد مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه 7cm وطول نصف قطر دائرته 3cm.

7) جد مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته يساوي $120^\circ$ وطول نصف قطر دائرته 12cm.

8) قطاع دائري مساحته تساوي $48cm^2$ وطول نصف قطر دائرته 8cm جد طول قوسه.

9) جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها $30^\circ$ وطول نصف قطر دائرتها 10cm.

## مسائلُ حياتيةٌ



10) منتزه على شكل دائرة اذا كان جزء من سياجها طوله 12m وطول نصف قطرها 25m ، جد مساحة القطاع الدائري المحدد بهذا الجزء من السياج .



11) ملعب للركض على شكل دائرة تم تحديد جزء منه لرمي الثقل فاذا كان قطر الملعب 76m وطول قوس الجزء المقتطع 25m، فما مساحة الجزء المتبقي من الملعب؟

# الدرسُ [2-5]

## المتطابقات المثلثية — Trigonometric Identities

**فكرة الدرس**

* يتعرف على المتطابقات المثلثية
* يثبت صحة المتطابقات المثلثية

**المفردات**

* المتطابقات المثلثيية الاساسية

**تعلم**

للمتطابقات المثلثية الاساسية تطبيقات في مجالات عدة في الفيزياء و الهندسة و الملاحة الجوية و البحرية كما انها تستخدم في برمجة الروبوت و حساب زوايا الحركة بدقة.




## [2-5-1] المتطابقات المثلثية الاساسية — Fundamental Trigonometric Identities

**1 -** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

**2 -** $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ , $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

**3 -** $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ , $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

**4 -** $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

**5 -** $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

المتطابقة المثلثية هي معادلة تبقى صحيحة مهما تبدلت قيم المتغيرات الواردة فيها لبرهنة المتطابقات المثلثية المعطاة نبسط الطرف الأيسر او الطرف الأيمن او كلاهما باستخدام المتطابقات المثلثية والأساسية .

**مثال (1)** اثبت ان

i ) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

$L.H.S = \sin^4\theta - \cos^4\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

تحليل الفرق بين مربعين و بالتعويض عن المتطابقة $(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1)$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta) = R.H.S$

ii ) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$L.H.S = \csc^2\theta - \cot^2\theta$

$= \cot^2\theta + 1 - \cot^2\theta$

$= 1 = R.H.S$

بالتعويض عن المتطابقة $(\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1)$

**مثال (2)** اثبت ان

i ) $\tan^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta$

$L.H.S = \tan^2\theta + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta = R.H.S$ وبالتعويض عن المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ii ) $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta} = \sec\theta$

$L.H.S = \dfrac{\csc\theta}{\cot\theta} = \dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = R.H.S$ بالتعويض والاختصار

**مثال (3)** اثبت ان $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

$L.H.S = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \cdot \dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ نضرب البسط و المقام في مرافق المقام ( $1-\cos\theta$ )

$= \dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} = \dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$= \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \csc\theta - \cot\theta = R.H.S$

**مثال (4)** اثبت صحة المتطابقة $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\cos\theta$

$L.H.S = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ بالتعويض عن المتطابقة $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

من المتطابقات الاساسية

$= \dfrac{\sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}$

$= \sin\theta\cos\theta = R.H.S$

**مثال (5)**

اثبت صحة المتطابقة $\frac{3\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\sin^2\theta} = 4\cot^2\theta$

$$L.H.S = \frac{3\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\sin^2\theta} = \frac{3\cos^2\theta + (1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}$$

بالتعويض عن المتطابقة

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$$= \frac{3\cos^2\theta + (\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$$

بالتعويض عن المتطابقة

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{4\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 4\cot^2\theta = R.H.S$$

**مثال (6)**

اثبت صحة المتطابقة $\sin^3\theta \csc\theta + \cos^3\theta \sec\theta = 1$

$$L.H.S = \sin^3\theta \csc\theta + \cos^3\theta \sec\theta$$

$$= \sin^3\theta \frac{1}{\sin\theta} + \cos^3\theta \frac{1}{\cos^3\theta}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 = R.H.S$$

بالتعويض عن المتطابقات

$(\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta})$

**مثال (7)**

اثبت صحة المتطابقة $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$

$$L.H.S = \sec^2\theta + \csc^2\theta$$

$$L.H.S = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

من المتطابقات الاساسية

$(\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta})$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \csc^2\theta = R.H.S$$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta - 1} =$

(a) $\sec\theta$ (b) $\csc\theta$ (c) $-\sec\theta$ (d) $-\csc\theta$

2) $\frac{\csc\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(a) $\csc\theta$ (b) $-\csc\theta$ (c) $\cos\theta$ (d) $\sin\theta$

## التمرينات

اثبت صحة المتطابقات الاتية

3) $\frac{2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = 2\sec^2\theta$

4) $(1-\sin^2\theta).(1+\tan^2\theta) = 1$

5) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \sec^2\theta \csc^2\theta$

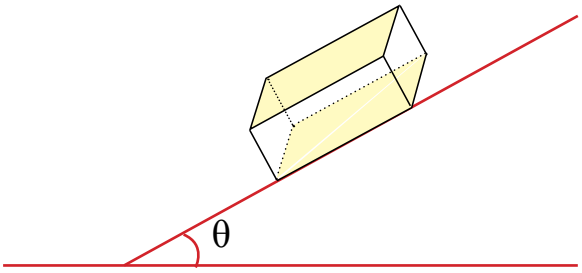
6) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

7) $\frac{1+\sin\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta + \tan\theta$

## مسائلُ حياتيةٌ

8) انزلاق متوازي مستطيلات على سطح مائل ، زاوية

الانزلاق يمكن ايجادها من العلاقة $\sin\theta = \mu_s \cos\theta$ .




i) احسب زاوية الانزلاق في كل حال

ii) انزلاق المطاط على الاسمنت $\mu_s = \sqrt{3}$

iii) انزلاق الزجاج على معدن مزيت $\mu_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$

حيث $\mu_s$ معامل الاحتكاك الثابت ( يُقرأ ميو لـ s )

# اختبار الفصل

# Chapter Test

1 حول الزوايا التالية الى القياس الستيني :

i ) $\frac{\pi}{3}$ ii ) $\frac{7\pi}{4}$ iii ) $\frac{7\pi}{6}$

2 حول الزوايا التالية الى القياس الدائري :

i ) $360^\circ$ ii ) $450^\circ$ iii ) $540^\circ$

3 دائرة فيها زاوية مركزية قياسها $60^\circ$ ، وطول القوس المقابل لها يساوي 8cm ، جد محيط الدائرة .

4 زاوية مركزية قياسها $45^\circ$ ، ما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول قطر دائرتها يساوي 10cm ؟

5 ارسم الدوال المثلثية الآتية :

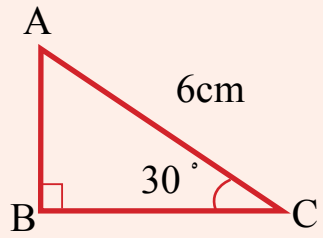
i ) $y = 3 \sin \theta$ ii ) $y = 4 \cos \theta$ iii ) $y = 5 \tan \theta$

6 اذا كانت النقطة المثلثية $( \frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} )$ ، جد النسب المثلثية الستة .

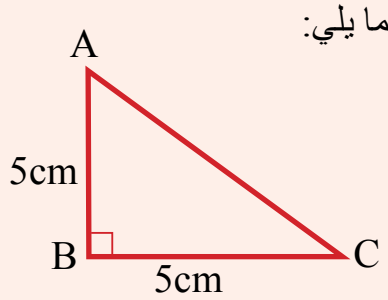
7 جبل ارتفاعه 2500m ، وجد راصد من قمته ان قياس انخفاض نقطة في الوادي $60^\circ$ ، فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟

8 حلّ المثلث فيما يلي:

i )




ii )




9 اذا كانت مساحة قطاع دائري تساوي $12cm^2$ ، وطول قوسه 6cm جد :

i ) مساحة الدائرة ii) محيط الدائرة iii) قياس الزاوية المركزية بالقياس الستيني

10 باستخدام الزوايا المنتسبة جد النسب المثلثية الاساسية للزواية $120^0$ بطريقتين .

11 اثبت صحة المتطابقات الآتية :

i ) $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cot \theta} = \sin \theta \cos \theta$ ii ) $\sin \theta ( \csc \theta - \sin \theta ) = \cos^2 \theta$

# الدرسُ [3-1]

## خصائص المصفوفاتِ وأنواعُها

## Properties And Type of Matrices

**فكرة الدرس**

* تنظيمُ البيانات في مصفوفةٍ.
* مصفوفة تحليل البيانات.

**المفرداتُ**

* المصفوفةُ.
* العنصرُ.
* رتبة المصفوفة.
* مصفوفة الصف.
* مصفوفة العمود.
* المصفوفة المربعة.
* المصفوفة الصفرية.
* المصفوفات المتساوية.
* مصفوفة الوحدة.

**تعلم**

الجدول أدناه يمثل ترتيب أربعة فرق لكرة القدم

| اسم الفريق | عدد الفوز | التعادل | الخسارة | النقاط |
|---|---|---|---|---|
| a | 6 | 3 | 1 | 21 |
| b | 5 | 2 | 3 | 17 |
| c | 5 | 1 | 4 | 16 |
| d | 4 | 3 | 3 | 15 |

## [3-1-1] المصفوفة Matrix

**المصفوفة:** هي ترتيبٌ على هيئةِ مستطيل لمتغيرات او اعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين على شكل[ ]، تنظم الاعدادِ في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا ويرمز الى المصفوفة باستعمال الاحرف الكبيرة.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 5 & 1 & 4 & 16 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

اربعة صفوف

اربعة أعمدة

العنصر $a_{ij}$ هو أحد عناصر المصفوفة في الصف i والعمود j

فمثلاً العنصر (3) المؤشر موجود في الصف الثاني (i=2) والعمود الثالث (j=3) ويرمز له بالرمز $a_{23}$

العنصر(6) موجود في الصف الاول (i=1) والعمود الاول (j=1) ويرمزُ بالرمز $a_{11}$

يمكنُ تحديدُ نوع المصفوفة برتبتها إذ تتكون من m من الصفوف، n من الأعمدة ويقال أن المصفوفة من الرتبة m×n او نوع m×n وتقرأ (m في n) المصفوفة A هي مصفوفة من نوع 4×4 او من الرتبة 4×4

**مثال (1)**

لتكن $A=\begin{bmatrix} -20 & 8 & 14 \\ 10 & -9 & 24 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

i) ما هي رتبة المصفوفةِ A ؟

ii) ما قيمة العنصر $a_{22}$ ؟

i) رتبة المصفوفةِ A من 3 صفوف، 3 اعمدة، اذن رتبتها 3×3

ii) بما ان العنصر $a_{22}$ موجود في الصفِ 2 والعمود 2 ، فان قيمته تساوي -9

**مثال (2)** استعملِ المصفوفةَ

$$A=\begin{bmatrix}-18 & 6 & 38\\ 9 & -9 & 22\end{bmatrix}$$

للإجابة عن كل مما يأتي:

a) حدِّد الرتبة للمصفوفة A.

b) ما قيمة العنصر $a_{21}$ ؟

**( a**

$$\begin{bmatrix}-18 & 6 & 38\\ 9 & -9 & 22\end{bmatrix}$$

صفوف

أعمدة

∵ A فيها صفان (m=2) و3 أعمدة (n=3)

فإن الرتبة $m\times n = 2\times 3$

**( b**

$$\begin{bmatrix}-18 & 6 & 38\\ 9 & -9 & 22\end{bmatrix}$$

الصف الثاني

العمود الأول

∵ أن العنصر $a_{21}$ في الصف الثاني

العمود الأول فإن قيمته $a_{21} = 9$

**مثال (3)** استعمل المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}10 & -8 & 5\\ -2 & 19 & 0\\ 6 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

للإجابة عن كل مما يأتي:

a) ما رتبة المصفوفةِ B ؟

b) ما الفرقُ بين العنصرين $b_{32}$ ، $b_{23}$ ؟

a) رتبة المصفوفة B تساوي $m\times n = 3\times 3$

(b

$b_{32} = -1$

العمود الثاني — الصف الثالث

وقيمته = -1

بينما

$b_{23} = 0$

الصف الثاني — العمود الثالث

وقيمته = 0

**مثال (4)** وزِّع العمل على الوحدات الادارية لبعض المحافظات على مجموعتين أ، ب

1) نظّم البياناتِ الموجودة في الجدولِ على شكلِ مصفوفة B

2) حدِّد رتبة المصفوفةِ B

3) ما قيمة $a_{12}$ , $a_{21}$ , $a_{32}$ , $a_{41}$ ؟

| المحافظة | الوحدة الادارية المجموعة أ | الوحدة الادارية المجموعة ب |
|---|---|---|
| بغداد | 8 | 12 |
| ديالى | 7 | 9 |
| البصرة | 4 | 4 |
| النجف | 7 | 5 |

(1

$$B=\begin{bmatrix}12 & 8\\ 9 & 7\\ 4 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}$$

2) رتبة المصفوفةِ B تساوي $m\times n = 4\times 2$

3) $a_{12} = 8$ , $a_{21} = 9$ , $a_{32} = 4$ , $a_{41} = 5$

## [3-1-2] أنواع المصفوفاتِ Types of Matrices

**1 - مصفوفةُ الصفِ Row Matrix:** هي المصفوفةَ التي تحتوي على صفٍ واحد حيث $m = 1$ ورتبتها $1\times n$ مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

**2 - مصفوفةُ العمودِ Column Matrix:** هي المصفوفةُ التي تحتوي على عمود واحد حيث $n = 1$ ورتبتها $m\times 1$ مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

**3 - المصفوفةُ المربعةِ Square Matrix:** هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الاعمدة حيث $m = n$ ورتبتها $m\times n$ مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

**4 - المصفوفةُ الصفريةِ Zero Matrix:** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها $\underline{O}$ مثلاً:

$$\underline{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**5 - المصفوفةُ القطريةِ Diagonal Matrix:** هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها الغير القطرية أصفار:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

**6 - مصفوفةُ الوحدةِ Identity Matrix:** هي المصفوفةُ المربعة التي عناصر قطرها الرئيس العدد 1 ويرمز لها $\underline{I}$ مثلاً:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

**ملاحظة : تكون المصفوفتان متساويتين Equal Matrices:** اذا كانت من الرتبة $3\times 3$ نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

( بسبب اختلاف الرتبة )

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

( بسبب اختلاف العناصر )

## الأختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) رتبة المصفوفة D:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

a) 4×2 b) 4×8 c) 2×4 d) 8×4

2) العنصر $a_{32}$ في المصفوفة D يساوي؟

a) 1 b) 2 c) 0 d) -5

3) العنصر الذي قيمته (1) في المصفوفة D هو:

a) $d_{13}$ b) $d_{22}$ c) $d_{31}$ d) $d_{33}$

4) مصفوفة الوحدة هي:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## التمرينات

حدِّد رتبة كلِّ مصفوفة فيما يأتي

5) $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ 8) $\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ 9) $\begin{bmatrix} -18 & 6 & 22 \\ 9 & 38 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 10) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

11) اذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 \\ -4 & 19 & 4 \end{bmatrix}$

جد $a_{22}$ , $a_{21}$ , $b_{22}$ , $b_{13}$ , $a_{12}$ ، ثم حدِّد موقع العنصر الذي قيمته (11) في المصفوفتين

## مسائلُ حياتيةٌ

12) يبينُ الجدولُ النقاطَ التي حصلَ عليها 3 طلاب في مسابقة علمية على 3 جولات، نظمت هذه البيانات في مصفوفة ، حدِّد نوع المصفوفة وما رتبة المصفوفةِ؟

ثم جد $a_{11}$ , $a_{23}$ , $a_{31}$ , $a_{22}$ , $a_{13}$ , $a_{33}$

| الاسم | جولة (1) | جولة (2) | جولة (3) |
|---|---|---|---|
| علي | 221 | 201 | 185 |
| أحمد | 168 | 233 | 159 |
| محمد | 187 | 189 | 211 |

13) يبيِّنُ الجدولُ المجاورُ الأسعار بالدينار العراقي بالألوف لثلاثة أحجام من الفطائر في أحدِ المطاعم.

| ثلاثة أنواع من الفطائر | | | |
|---|---|---|---|
| | حجم (3) | حجم (2) | حجم (1) |
| الخضار | 13 | 24 | 35 |
| الدجاج | 12 | 23 | 34 |
| اللحم | 14 | 25 | 36 |

1) نظِّم هذه البيانات في مصفوفة B.

2) حدِّد رتبة المصفوفة B.

3) ما قيمة العنصر $a_{12}$ ؟

4) ما موقع العنصر الذي قيمته 34 في المصفوفة B ؟

# الدرسُ [3-2] العملياتُ على المصفوفاتِ The Operations on Matrices

**فكرة الدرس**

* جمعُ المصفوفاتِ وطرحها.
* ضربُ المصفوفةَ بعدد حقيقي ثابت.

**المفرداتُ**

* جمعُ مصفوفتين.
* طرحُ مصفوفتين.
* ضربُ مصفوفة في عددٍ ثابت.

**تعلّم**

لدينا ثلاثةُ طلاب متفوقين اشتركوا في اختباراتِ أسئلة الذكاء في الأسئلة العلمية، الأسئلة الرياضية، الأسئلة الثقافية وحصلوا على النقاط الموضحة في الجداول الآتي

| | |
|---|---|
| الاول | 7 |
| الثاني | 9 |
| الثالث | 8 |

أسئلة علمية

| | |
|---|---|
| الاول | 6 |
| الثاني | 7 |
| الثالث | 9 |

أسئلة رياضية

| | |
|---|---|
| الاول | 8 |
| الثاني | 9 |
| الثالث | 10 |

أسئلة ثقافية

ويمكن معرفة النقاط التي حصلو عليها الطلاب الذين فازوا بالاختبارات الثقافية والرياضية وكذلك معرفة الفرق في عدد النقاط التي حصلو عليها الطلاب في الاختبارات الثقافية والاختبارات العلمية باستعمال عمليات الجمع والطرح على المصفوفات .

## [3-2-1] جمعُ المصفوفاتِ وطرحها Adding and Subcracting Matrices

اذا كانت A,B مصفوفتين من الرتب m×n فان A+B هي مصفوفةُ ايضا من الرتبة m×n ويكون كلُّ عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في B,A وكذلك A-B هي مصفوفة من الرتب m×n ايضا وتحصل عليها بطرح العناصرفي المصفوفة B من العناصر المناظرة لها في المصفوفة A.

لتكن

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \quad , \quad A-B=\begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

**مثال (1)**

في فقرة تعلم:

$$C=\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \text{(العلمية)} \qquad B=\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \text{(الرياضية)} \qquad A=\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \text{(الثقافية)}$$

$$A-C=\begin{bmatrix} 8-7 \\ 9-9 \\ 10-8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A+B=\begin{bmatrix} 8+6 \\ 9+7 \\ 10+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 19 \end{bmatrix}$$

### خاصية التبديل (Commutative)

اذا كانت A,B مصفوفتين من الرتبة m×n فإن A+B = B+A .

**مثال (2)** اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}4+4 & -2+(-1)\\ -3+3 & 10+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -3\\ 0 & 12\end{bmatrix}$$

جد B+A ماذا تلاحظ؟

### خاصية المصفوفة المحايدة في الجمع (Additive Idintity)

اذا كانت رتبة المصفوفة A تساوي m×n ورتبة المصفوفة $\underline{O}$ تساوي m×n ، فإن $A+\underline{O}=\underline{O}+A=A$ .

**مثال (3)** اذا كانت $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}$ ، فإن

$$A+\underline{O}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0 & -2+0\\ -3+0 & 10+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}=A$$

جد $\underline{O}+A, A-\underline{O}$ ماذا تلاحظ؟

### خاصية معكوس المصفوفة الجمعي (Additive Inverse)

اذا كانت رتبة المصفوفة A تساوي m×n فان -A هو المعكوس الجمعي للمصفوفة A ورتبتها m×n.

حيث $A+(-A)=\underline{O}$

**مثال (4)** اذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ جد معكوس المصفوفة الجمعي .

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}\Longrightarrow -A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$A+(-A)=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\underline{O}$$

**مثال (5)** من المثال السابق

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+(-4) & -2+1\\ -3+(-3) & 10+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -6 & 8\end{bmatrix}$$

جد B-A ماذا تلاحظ؟

## خاصية التجميع (Associative)

اذا كانت A ,B,C مصفوفات من الرتبة m×n فان (A+B) + C = A+(B+C).

**مثال (6)**

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$

i) جد (A+B) + C

$$(A+B)+C=\left[\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & -3\\ 0 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

ii) جد A+(B+C) ماذا تلاحظ

**مثال (7)**

جد إن أمكن B-C ، B+C .

$C=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -3 & -7\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}8\\ 6\end{bmatrix}$

لا يمكنُ طرح او جمع المصفوفتين B,C لان رتبة المصفوفة B تساوي 2×1 في حين أنّ رتبة المصفوفة C تساوي 2×2 وهما من رتب مختلفة فلا يمكن إجراء عمليتي الجمع اوالطرح عليهما .

## الضربُ في عددٍ حقيقي ثابت

حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة m×n في عددٍ ثابتٍ k هي مصفوفة k A من الرتبة m×n وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفةِ A مضروباً في العددِ الثابت k.

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ حيث k عدد ثابت ، فأن

$$k\,.\,A=k\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}$$

**مثال (8)**

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ، k = -3 فجد المصفوفة k . A

$$k\,.\,A=-3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3(3) & -3(1)\\ -3(2) & -3(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -3\\ -6 & -12\end{bmatrix}$$

**مثال (9)**

اذا كانت $B=\begin{bmatrix}-12 & 6 & 3\\ 10 & 2 & 5\end{bmatrix}$ ، فجد $6B$

$$6B=6\begin{bmatrix}-12 & 6 & 3\\ 10 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6(-12) & 6(6) & 6(3)\\ 6(10) & 6(2) & 6(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-72 & 36 & 18\\ 60 & 12 & 30\end{bmatrix}$$

**مثال (10)**

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

جد المصفوفة C حيث $C+3B=2A$

$$C=2A-3B \Rightarrow C=2\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 10 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -9\\ 12 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 22 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 22 & 0\end{bmatrix}$$

## الأختيار من متعدد

اخترِ الأجابةَ الصحيحةَ لكلٍ مما يأتي:

1) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

فإن المصفوفة التي تمثل $2A+3B$ هي:

a) $\begin{bmatrix}-6 & 3 & 9\\ 0 & 9 & 5\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-4 & 2 & 6\\ 0 & 6 & 4\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-5 & 15 & 30\\ 15 & 25 & 15\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}-1 & 8 & 15\\ 9 & 12 & 7\end{bmatrix}$

2) اذا كانت :

$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -6 & 0\end{bmatrix}$ , $B=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$C-2B=A$

فان المصفوفة C هي :

a) $\begin{bmatrix}42 & 6\\ -4 & 12\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}21 & 3\\ -2 & 6\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}12 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}27 & -5\\ -12 & 0\end{bmatrix}$

## التمرينات

جدْ ناتج جمع المصفوفتين:

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$

جد $-4T$ ، اذا كانت

5) $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$

جد ناتج طرح المصفوفتين:

6) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

جد حاصل ضرب عدد في مصفوفة:

7) $-6 \begin{bmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 6 & 14 & -2 \\ 4 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

جدْ ناتج جمع المصفوفتين ان أمكن:

8) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

اذا كانت

9) $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ , $C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فجد $-8C + 3A$ , $4B - 2A$ , $A+B-C$ ,$A-B-C$,$A-B+C$,

## مسائلُ حياتيةٌ

10) يبينُ الجدولُ المجاور قائمةَ أسعار العصائر بآلاف الدنانير في مطعم إذا خفَّضَ المطعمُ أسعارَ جميع العصائرِ بنسبة 50%.

| العصائر | صغير | وسط | كبير |
|---|---|---|---|
| برتقال | 3 | 4 | 5 |
| رمان | 2 | 3 | 4 |
| موز | 2 | 3 | 4 |
| بطيخ | 4 | 5 | 6 |

a) اكتب المصفوفة C التي تمثلُ الأسعارَ الحالية.

b) ما العددُ الذي يمكن ان نضرب المصفوفة C فيه لإيجاد المصفوفة N التي تمثل الأسعار الجديدة؟

c) جدِ المصفوفة N.

d) جدِ المصفوفة C - N ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

11) يبينُ الجدولُ المجاور محل بيع الأدوات المنزلية على مدى شهر ايلول.

| انواع | الموجودات | | المبيعات | | المشتريات | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | صغيرة | كبيرة | صغيرة | كبيرة | صغيرة | كبيرة |
| ثلاجات | 8 | 10 | 7 | 9 | 15 | 20 |
| تلفزيونات | 15 | 12 | 15 | 12 | 18 | 24 |

احسب المصفوفة $H-G+D$

حيث H مصفوفة الموجودات، G مصفوفة المبيعات، D مصفوفة المشتريات.

ماذا تمثل المصفوفة الناتجة؟

# الدرسُ [3-3] ضربُ المصفوفاتِ Multiplying Matrices

**فكرةُ الدرسِ**

* تعرف ضربُ المصفوفاتِ.
* تعرف خصائص ضرب المصفوفات.
* استعمالُ خصائصَ ضربِ المصفوفات في حل التمرينات.

**المفردات**

* ضربُ المصفوفاتِ.

**تعلم**

في الجدولِ المجاور أنواع الأقلام وعددُها التي في المكتبة والتي بيعت في 3 أشهر متتالية.

| نوع القلم | شباط | آذار | نيسان |
|---|---|---|---|
| الرصاص | 150 | 200 | 100 |
| حبر سائل | 20 | 7 | 8 |
| حبر جاف | 80 | 140 | 100 |

## [3-3-1] ضرب المصفوفاتِ Multiplying Matrices

عند ضرب مصفوفتين يجب ان يكون عددُ أعمدة المصفوفة الاولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية فعند ضرب المصفوفة B ذات الرتبة m×n في المصفوفةِ A ذات الرتبة n×t يكون الناتج مصفوفة من الرتبة m×t .

$$B_{m\times n} \cdot A_{n\times t} = (BA)_{m\times t}$$

اي عنصر في الصفِ m والعمود t من المصفوفة BA هو مجموعُ نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة B بعناصر العمود n من المصفوفةِ A بالترتيبِ

$$\underset{B_{m\times n}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \cdot \underset{A_{n\times t}}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{(BA)_{m\times t}}{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}}$$

**مثال (1)**

من فقرة تعلّم اذا علمتَ ان سعرَ بيع قلم الرصاص 250 دينار وقلم الحبر السائل 750 دينار وقلم الحبر الجاف 500 دينار، فيمكن التعبير عن الجدولِ بالمصفوفةِ A والتعبير عن مصفوفة السعر بالمصفوفة B .

$$A=\begin{bmatrix} 150 & 200 & 100 \\ 20 & 7 & 8 \\ 80 & 140 & 100 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix} 250 & 750 & 500 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

باستعمال ضرب المصفوفات نجد مصفوفة ثمن بيع الاقلام (BA)، لماذا لايجوز (AB)؟

$$BA=\begin{bmatrix} 250 & 750 & 500 \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 200 & 100 \\ 20 & 7 & 8 \\ 80 & 140 & 100 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$BA=[\,250(150)+750(20)+500(80) \quad 250(200)+750(7)+500(140) \quad 250(100)+750(8)+500(100)\,]$$

$$=[92500 \quad 125250 \quad 81000]$$

**مثال (2)**

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

جد AB

رتبة المصفوفة A هو 2×2 ورتبة المصفوفة B هو 2×2 يؤدي إلى المصفوفة AB ذات الرتبة 2×2

الخطوة (1): نضرب عناصرَ الصفِ الاول في المصفوفةِ A في عناصرِ العمودِ الاول في المصفوفة B ثم نجمع نواتجَ الضربِ ونضع النتيجة في الصفِ الاولِ والعمود الاول من المصفوفة AB

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{6} & \boxed{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-5} & -4 \\ \boxed{3} & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & \\ & \end{bmatrix} \Longrightarrow a_{11}=-39$$

الخطوة (2): نتبعُ الخطوة نفسها مع عناصرِ الصف الاول والعمود الثاني ونكتب النتيجة في الصفِ الاول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} \boxed{6} & \boxed{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & \boxed{-4} \\ 3 & \boxed{3} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} & 6(-4)+(-3)(3) \end{bmatrix} \Longrightarrow a_{12}=-33$$

الخطوة (3): نتبعُ الخطواتِ نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الاول ونكتبُ النتيجة في الصف الثاني والعمود الاول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \boxed{-10} & \boxed{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{-5} & -4 \\ \boxed{3} & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -10(-5)+(-2)(3) & \end{bmatrix} \Longrightarrow a_{21}=44$$

الخطوة (4): نتبعُ الخطواتِ السابقةِ نفسها مع عناصرِ الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \boxed{-10} & \boxed{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \boxed{-4} \\ 3 & \boxed{3} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix} \Longrightarrow a_{22}=34$$

الخطوة (5): نكتبُ مصفوفة ناتج الضرب

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

## [3-3-2] خصائصُ الضربِ — Properties of Multiplication

تذكر ان خصائصَ الاعداد الحقيقية جميعُها تبقى صحيحة ايضاً عند جمعِ المصفوفاتِ إلا أن بعض خصائص ضرب الاعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائماً عند ضرب المصفوفات.

1) الخاصيةُ الابدالية $AB \neq BA$

2) الخاصيةُ التجميعية لضربِ المصفوفات $C(AB) = (CA)B$

3) خاصيةُ التوزيع من اليسارِ للمصفوفاتِ $C(A+B) = CA + CB$

4) خاصيةُ التوزيع من اليمينِ للمصفوفاتِ $(A+B)C = AC + BC$

**مثال (3)** إذا كانت

$$X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فجد XY , YX إن أمكن:

1) $XY=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+3(4) & 2(3)+3(-2) & 2(-5)+(3)0 \\ -2(1)+(-8)(4) & -2(3)+(-8)(-2) & -2(-5)+(-8)0 \\ 1(1)+7(4) & 1(3)+7(-2) & 1(-5)+7(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2) $YX=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+3(-2)+(-5)(1) & 1(3)+3(-8)+(-5)(7) \\ 4(2)+(-2)(-2)+0(1) & 4(3)+(-2)(-8)+0(7) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24+(-35) \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

لاحظ $XY \neq YX$

### الأختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ يساوي:

a) $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$

2) اذا كانت المصفوفةُ XY من النوع 3×2 والمصفوفةُ X من النوع 3×1 فما رتبة المصفوفةِ Y:

a) 2×3 b) 1×2 c) 3×4 d) 4×2

3) المصفوفة التي تمثل حاصل الضرب هي: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$

## التمرينات

جد مصفوفة الضرب فيما يلي إن أمكن:

4) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

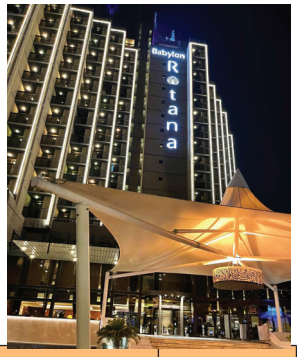
5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

## مسائلُ حياتيةٌ

8) لدى مؤسسةٍ فندقيةٍ 3 مبانٍ للإيجار، ويُبيِّنُ الجدولُ في أدناه عددَ الغرفِ في كلِّ مبنى فإذا كانت الأجرةُ اليوميةُ للغرفةِ التي تحتوي سريراً واحداً 150 ألف دينار وللغرفة التي تحتوي سريرين 200 ألف دينار وللغرفة التي تحتوي ثلاثة أسرّة 250 ألف دينار. اكتب المصفوفة التي تمثلُ عددَ الغرف ، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف .




| المبنى | سرير واحد | سريرين | ثلاث أسرة |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 5 | 4 | 0 |

9 ) اشترى أحمدُ 4 علب حليب، 2kg تفاح ، 3kg بطاطس وكيساً واحداً من الارز وتبينُ المصفوفةُ ادناه سعر علبة الحليب، والكيلوغرام الواحد من التفاحِ والكيلوغرام الواحد من البطاطسِ وكذلك سعر كيس الارز بالالف استعمل ضربَ المصفوفةِ لإيجاد اجمالي المبلغ الذي دفعه أحمد.



| أرز | بطاطس | تفاح | حليب |
|---|---|---|---|
| 10000 | 1000 | 4000 | 6000 |

# الدرسُ [3-4]

## محدداتُ المصفوفاتِ المربعةِ (2×2) ، (3×3)
## Determinant of Square matrices of (2×2) ، (3×3)

**فكرةُ الدرسِ**
* أحسبُ المحدداتِ

**المفردات**
* المحدد
* محدد المصفوفة 2×2
* محدد المصفوفة 3×3
* قاعدة الاقطار

**تعلم**



إذا كانت احداثياتُ رؤوس المنطقة التي يعيش فيها النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلو مترات فاستعمل المحددات لايجاد مساحة المنطقة . التعبير اللفظي: مساحة المثلث التي احداثيات رؤوسه $(a , b),(c,d)،(e,f)$

القيمة المطلقة للمحدد

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

## [3-4-1] محددة المصفوفة المربعة (2×2) Determinant of Square matrices of (2×2)

**المحددات:** كلُّ مصفوفةٍ مربعةٍ لها محدد وتسمى محددة المصفوفة.

محدد المصفوفة (2×2) محدد الدرجة الثانية

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن محدد A هي $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ويرمز لها بالرمز $|A|$

وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضربِ عنصري القطر الاخر

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

القطر الرئيس

**مثال (1)** جد قيمةَ كلِّ محدد فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)(8) = 45 + 32 = 77$

القطر

2) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0(-4) - (6)(4) = 0 - 24 = -24$

## [3-4-2] محدد المصفوفة المربعة (3×3) Determinant of Square matrices of (3×3)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

محدد المصفوفةِ (3×3) محددة الدرجة الثالثة:

الطريقةُ الاولى: استعمالُ قاعدةِ الأقطارِ

الخطوة (1) اعدُ كتابةَ العمود الاول والثاني عن يمين المحدد

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

الخطوة (2) جدْ حاصلَ ضربِ عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازياتِ المبينةِ ثم اجمعْ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Longrightarrow aei + bfg + cdh$$

الخطوة (3) جدْ حاصلَ ضربِ عناصر القطر الاخر وثلاثيات العناصر على الموازياتِ المبينةِ ثم اجمعْ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Longrightarrow gec + hfa + idb$$

الخطوة (4) لايجادِ قيمة المحدد نطرحُ ناتجَ الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2

الطريقة الثانية: باستعمالِ محدد المصفوفةِ 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

**مثال (2)** جد قيمة المحدد التالية باستعمال قاعدةِ الأقطارِ ثم باستعمالِ محدد المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

أولاً: باستعمال قاعدة الاقطار

الخطوة (1) أعد كتابة العمود الأولِ والثاني عن يمين المحدد

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

الخطوة (2) جدْ حاصلَ ضربِ عناصر الأقطارِ وموازياتها

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$(-4)(2)(3) = -24$

$(5)(6)(4) = 120$

$(9)(-3)(-8) = 216$

$(4)(2)(9) = 72$

$(-8)(6)(-4) = 192$

$(3)(-3)(5) = -45$

الخطوة (3) أجمعُ نواتجَ الضربِ في كلِّ مجموعةٍ

$-24 + 120 + 216 = 312$ $\qquad$ $72 + 192 + (-45) = 219$

الخطوة (4) أطرحُ المجموعَ الثاني من المجموع الاول $\qquad$ $219 - 312 = -93$

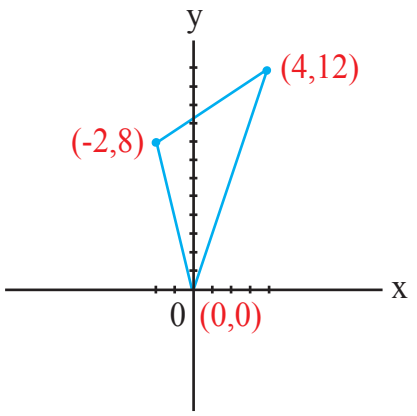
فتكون قيمة المحدد هي 93-

الطريقة الثانية: باستعمالِ محددةِ المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} -(-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-12) + 8(-3) + 3(-7) = -93$$

**مثال (3)** اذا كانت رؤوس المثلث (0,0) ، (4,12) ، (-2,8).فجد مساحة المنطقة المثلثة التي يعيش فيها النمر (من فقرة تعلم)




قانون مساحة المثلث $\qquad |A| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

نفرض مساحة المنطقة المثلثة هي A

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 0 \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \quad (0 - 0 + (32 + 24))$$

$$= \frac{1}{2} \quad (56) = 28 \quad km^2$$

## الأختيار من متعدد

اخترِ الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) قيمة محدد المصفوفةِ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ هي:

a) -44 b) 44 c) $\frac{1}{44}$ d) $-\frac{1}{44}$

2) إذا كان محدد $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 10$ فإنَّ قيمة x هي :

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2

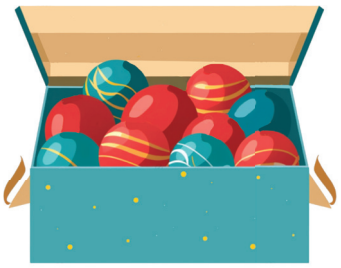
## التمرينات

جدْ قيمة كلِّ محددةٍ مما يأتي:

3) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

## مسائلُ حياتيةٌ



**8)** صندوق يحتوي على x كرة كل منها تحمل الرقم (3)، y كرة تحمل كل منها الرقم (5) ، اذا كان مجموع الكرات في الصندوق يساوي ( 10 ) القيمة العددية التي تحملها هذه الكرات تساوي 42

i ) اكتب مصفوفة تمثل الدالة

ii ) جد محدد هذه المصفوفة .



**9)** مساح لديه حديقة على شكل مثلث رؤوسها بالمستوى الاحداثي حسب النقاط ( 0 , 0 ) ، ( 4 , -2 ) ، ( x , 6 ) جد قيمة x لتكون مساحة الحديقة $126m^2$ .

# الدرسُ [3-5]

## حلُّ نظامٍ من المعادلاتِ الخطيةِ بطريقة كرامر

## Solving a System of Liner Equations by Cramer's Rule

**فكرةُ الدرسِ**

*حلُ انظمة معادلات خطية باستعمالِ قاعدة كرامر

**المفردات**

*مصفوفةُ المعاملاتِ

*قاعدةُ كرامر

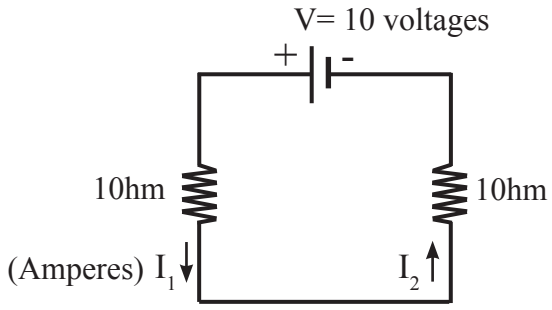
**تعلم**

بالنظر للدائرة الكهربائية المجاورة:

جد التيار $I_1$ ، $I_2$

حيث: $I_1 + I_2 = 10$

$I_1 - I_2 = 0$




## [3-5-1] حلُّ نظامٍ من معادلتين خطيتين بطريقة كرامر

استعمالُ المحدداتِ لحلِّ انظمة معادلات، فاذا كانت قيمةُ المحدد لمصفوفة المعاملاتِ لاتساوي صفرا فان للنظامِ حل وحيد واذا كانت قيمة المحددة صفرا فاما ان يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول او لا حل له وهنالك طريقة لحلِّ انظمة المعادلاتِ الخطيةِ تسمى قاعدة كرامر.

$$\left.\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + qy = n \end{matrix}\right\} \quad \text{حيث} \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & q \end{bmatrix} \quad \text{فإن} \quad |C| = \begin{vmatrix} a & b \\ f & q \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & q \end{vmatrix}}{|C|} \text{ ، } y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$$

وحلّ هذا النظام هو $\{(x, y)\}$ حيث ان $|C| \neq 0$

**مثال (1)** من فقرة تعلم اجد حل نظام المعادلات

$$I_1 - I_2 = 0$$
$$I_1 + I_2 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - 1 \times (-1) = 2 \neq 0$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}}{|C|} \Rightarrow I_1 = \frac{0 \times 1 - (10)(-1)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{|C|} \Rightarrow I_2 = \frac{10 - 0}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

**مثال (2)** حلُّ النظام باستعمال قاعدة كرامر

$$\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -29 \end{bmatrix}$$

أجد المحدد |C|

$$|C| = \begin{vmatrix} a & b \\ f & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad |C| = 5(4) - (3)(-6) = 20 + 18 = 38 \neq 0$$

نستخرج x ،

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & q \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38} = \frac{(15)(4) - (-29)(-6)}{38} = \frac{60 - 174}{38} = \frac{-114}{38} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38} = \frac{(5)(-29) - (15)(3)}{38} = \frac{-145 - 45}{38} = \frac{-190}{38} = -5$$

الحل هو $S = \{ (-3 , -5) \}$

التحقيق نعوضُ في كلا المعادلتين

$L.H.S = 5x - 6y = 5(-3) - 6(-5) = -15 + 30 = 15 = R.H.S$

$L.H.S = 3x + 4y = 3(-3) + 4(-5) = -9 - 20 = -29 = R.H.S$

**مثال (3)** أستعملُ قاعدةَ كرامر لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتية:

$3x + 2y = 0$

$x - y = -5$

أجدُ المحدد |C|

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} a & b \\ f & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (1)(2) = -5 \neq 0$$

نجد x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & q \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(0) - (-5)(2)}{-5} = \frac{10}{-5} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(-15) - (0)}{-5} = 3$$

الحلّ هو $S = \{ (-2 , 3) \}$

## [3-5-2] حلُّ نظامٍ من ثلاث معادلاتٍ خطيةٍ بقاعدةِ كرامر

اذا كانت C مصفوفة المعاملاتِ للنظامِ

إذا كان $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + iz = p \end{matrix} \Leftarrow C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$ فإنّ $|C|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & i \end{vmatrix}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & i \end{vmatrix}}{|C|} \quad ، \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & i \end{vmatrix}}{|C|} \quad ، \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

فأن حل هذا النظام هو $S=\{(x, y, z)\}$

حيث ان $|C| \neq 0$

**مثال (4)**

حلّ النظام باستعمالِ قاعدةِ كرامر

$$\begin{matrix} 4x + 5y - 6z = -14 \\ 3x - 2y + 7z = 47 \\ 7x - 6y - 8z = 15 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 47 \\ 15 \end{bmatrix}$$

احسب محددة مصفوفة المعاملات $|C|=\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}$ ، $|C| = 621 \neq 0$

بالاختصار

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621} \quad ، \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621} \quad ، \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$$

$$x=\frac{3105}{621}=5 \quad ، \quad y=-\frac{1242}{621}=-2 \quad ، \quad z=\frac{2484}{621}=4$$

$$S=\{(5, -2, 4)\}$$

التحقق

L.H.S = 7x-6y-8z=7(5) -6(-2) -8(4)
= 35 + 12 - 32 = 15 = R.H.S

L.H.S = 3x-2y+7z=3(5) -2(-2)+7(4)
= 15 + 4 + 28 = 47 = R.H.S

L.H.S = 4x + 5y + 6z = 4(5) + 5(-2) - 6(4)
= 20 - 10 - 24 = -14 = R.H.S

## الأختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) قيمة محددةِ المصفوفةِ $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ هي:

a) 11 b) -11 c) -31 d) 31

2) إذا كان محدد $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 16$ فإنَّ قيمة x

a) -6 b) 6 c) 4 d) -5

## التمرينات

استعمل قاعدة كرامر لحلّ نظامِ المعادلاتِ الآتية:

3) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

4) $2a + 6b = -1$
$a + 8b = 2$

5) $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

6) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

7) $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x - 8y - 5z = 55$

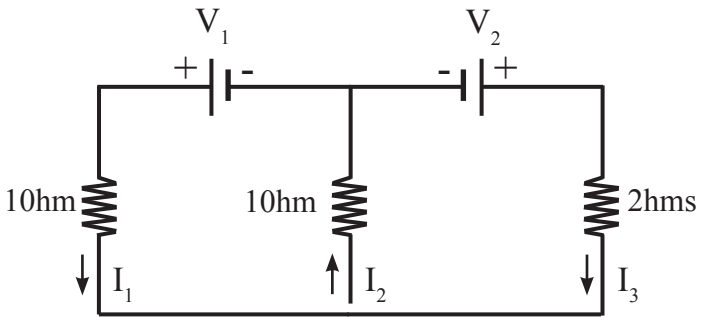
## مسائلُ حياتيةٌ



8) صَنعت هبة 3 أساور وعقدين بتكلفة 25 ألف دينار وصنعت ليلى سوارين و4 عقود بتكلفة 30 ألف دينار فإذا كانت للعقود التي صنعتها كلّ منهما التكلفة نفسها وكذلك الأساور، فجد تكلفة كلٍّ من العقدِ والسوارِ.

9) المنحني $f(x) = ax^2 + b$ يمر بالنقطتين (1,-2) ، (2,1)، جد a,b باستخدام طريقة كرامر.

10) استعمل المعلومات في الدائرة الكهربائية المجاورة،




إذا كان:

$I_1 - I_2 + I_3 = 0$

$I_1 + I_2 = V_1$ $\quad V_1 = 10$ volts حيث

$I_2 + 2I_3 = V_2$ $\quad V_2 = 15$ volts

جد قيمة التيارات $I_1$ ، $I_2$ ، $I_3$.

الفصلُ 4

# المتجهات والهندسة الإحداثية
# Vectors and Coordinate Geometry


الدرس [4-1] مفهوم المتجه

الدرس [4-2] العمليات على المتجهات

الدرس [4-3] المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الدرس [4-4] ميل المستقيم ومعادلة المستقيم

الدرس [4-5] تقسيم قطعة المستقيم

الدرس [4-6] المسافة بين نقطتين




يستعمل المتسابقون في سباقات الزوارق النهرية المتجهات لكي يأخذوا في الحسبان سرعة تيار الماء لكي يحسبوا سرعة الزورق واتجاهه عندما يخططون للسباق .

# الاختبارُ القبليّ Pretest

**حل المعادلات الآتية:**

1 $x^2 - 1 = 0$

2 $3y^2 - 27 = 0$

3 $x^2 - 6x + 5 = 0$

4 $25x^2 + 5x - 2 = 0$

5 $x^2 - 5x - 36 = 0$

6 $x^2 - x - 1 = 0$ (اكمال مربع)

7 $3x^2 - 12x + 3 = 0$ (قانون عام)

**جد مجموعة حلّ النظام لكلٍّ مما ياتي :**

8 $x - y = 6 \ , \ 2x + 3y = 6$

9 $x - 2y - 12 = 0, \ x - 3y = 6$

10 $2x = 2y + 6 \ , \ x + y = 6$

**مثِّل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي:**

11 $y + 3x - 1 = 0$

12 $y = x^2 + 2$

13 $y = -2x^2$

14 **عيِّن في المستوى الاحداثي النقاط التالية ثم ارسم القطع المستقيمة الناتجة**

i ) ( -3 , 5 ) , ( 0 , -4 )

ii ) ( 4 , 0 ) , ( 0 , 5 )

iii ) ( -1 , -2 ) , ( 3 , 5 )

15 المثلث ABC القائم الزاوية في B ، اذا كان $AB = 2 \text{ cm} , BC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ ، جد $\sin C , \cos C$ .

16 اذا كان $y = 3 , x = -4$ ، جد قيمة المقدار لكلٍّ مما يأتي :

i ) $2x + 4y - 5$

ii ) $\sqrt{x^2 + y^2}$

رابعيون
@TTTT_MO

# الدرسُ [4-1] مفهوم المتجه

# Concept of Vector

**فكرة الدرس**

* تعرف على المتجه هندسيا
*تعرف على المتجه جبريا
*إيجاد طول المتجه واتجاهه

**المفردات**

* المتجه
* مركّبة المتجه
* طول المتجه
*اتجاه المتجه

**تعلم**



انطلق زورق بسرعة 3km/h في الاتجاه شمال شرقي 60 درجة هَبَّ تيار مائي بسرعة كيلو متر واحد في الساعة باتجاه الشرق، كم صارت سرعة الزورق وكيف صار اتجاهه؟

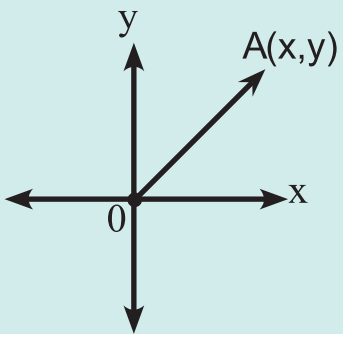
## [4-1-1] مفهوم المتجه هندسيا وجبريا

## Concept of Vector Geometrically and Algebraically

سبق وان درست بعض الكميات الفيزيائية منها الكتلة ، درجة الحرارة ، الازاحة ، السرعة ، التعجيل والقوة نجد بعض الكميات مثل الكتلة ودرجة الحرارة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها العددي فقط بينما بعض الكميات مثل الازاحة والسرعة والتعجيل والقوة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها واتجاهها مثل هذه الكميات تسمى كميات متجهة او تسمى

المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه

المتجه المقيد : هو المتجه الذي بدايته النقطة (0,0) ، ونهايته النقطة A(x,y) ويمثله في المستوى الاحداثي بالزوج المرتب (x,y) ويكتب المتجه المقيد بدلالة النقطة A(x,y) كما في الشكل

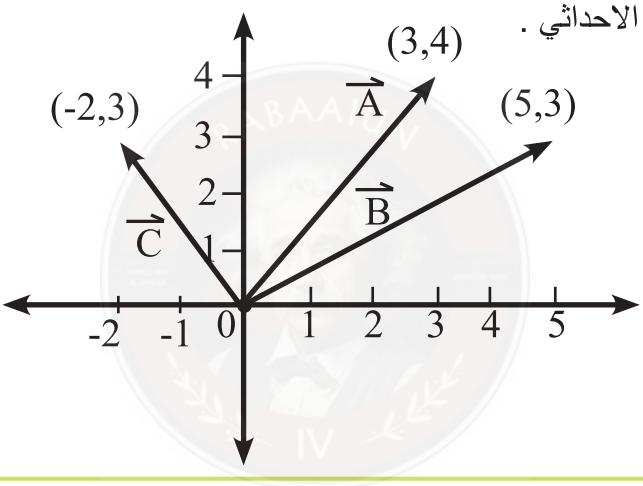



ويرمز له $\overrightarrow{A} = (x , y)$

**مثال (1)**

مثِّل المتجهات المقيدة التالية في المستوى الاحداثي .

$\overrightarrow{C} = (-2,3)$ , $\overrightarrow{B} = (5,3)$ , $\overrightarrow{A} = (3,4)$

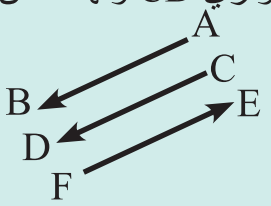



رابعيون
@TTTT_MO

## [4-1-2] طول المتجه Length and Direction of The Vector

**1- المتجهان المتوازيان : ( parallel vectors)**

اذا كانت قطعتا المتجهين متوازيتين، قد يكون للمتجهين المتوازيين الاتجاه نفسه وقد يكونان متعاكسين في الاتجاه ومن الشكل ادناه نلاحظ ان $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{CD}$ ولهما نفس الاتجاه ويوازي $\overrightarrow{FE}$ ويعاكسهما بالاتجاه

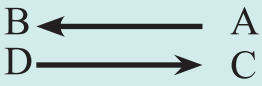



**2- المتجهان المتكافئان : ( Equivalent vectors)** : اذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه




$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$

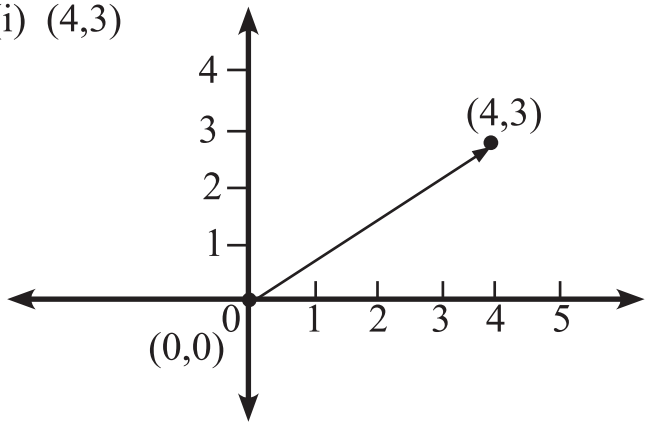
**3- المتجهات المتناظرة :** لها نفس الطول وباتجاهين متعاكسين




اذا كان $\overrightarrow{A} = (x , y)$ فأن طوله $\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

**مثال (2)** جد طول المتجهات الآتية :

(i) (4,3)




1- الخطوه (1) ارسم المتجه في المستوى الاحداثي مستعملا نقطة الاصل كنقطة بداية ، ونقطة نهاية وهي (4,3)

ليكن $\overrightarrow{A} = (4 , 3)$ , $\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

وحدة طول $\|\overrightarrow{A}\| == \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

ii) ليكن $\overrightarrow{B} = (-12 , -9)$

وحدة طول $\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

رابعيون
@TTTT_MO

## [4-1-3] اتجاه المتجه Vector Direction

**اتجاه المتجه :** هو الزاوية التي يشكلها مع مستقيم افقي تقاس هذه الزاوية في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة ، انطلاقا من الجزء الموجب من المحور الاول ، او الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

اتجاه المتجه : اذا كان $\vec{A}=(x,y)$ فان اتجاه $\vec{A}$ يعرف بقياس الزاوية Q حيث $0\leq Q<2\pi$ مقاسه باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة مع محور السينات الموجب اي المتجه $\vec{A}$ .

| الربع | θ | sin | cos |
|---|---|---|---|
| 1 | θ | + | + |
| 2 | $\pi$ -θ | + | - |
| 3 | $\pi$ +θ | - | - |
| 4 | 2 $\pi$ -θ | - | + |

وطول المتجه $\|\vec{A}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

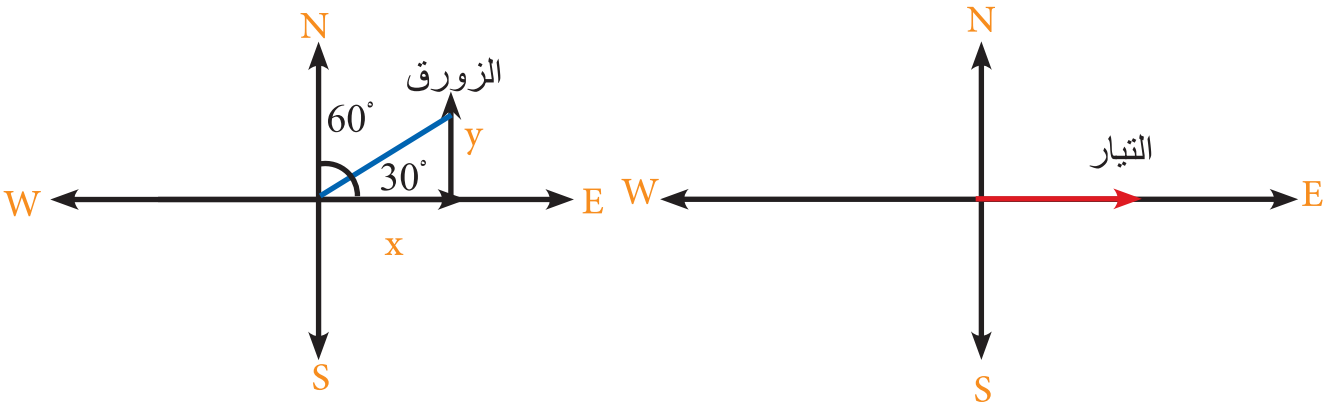
$$\cos Q=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

.

$$\sin Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

**مثال (3)** في فقرة تعلَّم

**الخطوة (1) :** ارسم المتجهين اللذين يمثلان حركة الزورق وحركة التيار .




**الخطوة (2) :** اكتب المتجه الذي يمثل حركة الزورق على شكل زوج مرتب

طول المتجه الذي يمثل حركة 3Km\h وبما انه انطلق باتجاه شمال الشرق بزاوية قدرها 60˚ لذا فهو يشكل زاوية قياسها 30˚ درجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\cos 30^\circ=\frac{x}{3}\Rightarrow x=3\cos 30^\circ\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{y}{3}\Rightarrow y=3\sin 30^\circ\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

المتجه الذي يمثل حركة الزورق هو الزوج المرتب $(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ .

**الخطوة (3) :** اكتب متجه التيار بمركبتيه بما ان التيار يتحرك بسرعة كيلو متر واحد باتجاه الشرق فان مركبته الاولى تساوي 1 ومركبته الثانية تساوي 0 وحدة طول المتجه الذي يمثل حركة التيار هو (1,0) .

**مثال (4)** جد طول واتجاه المتجه الآتية:

$$\vec{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\cos Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اذن اتجاه المتجة هو $Q = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

**مثال (5)** جد المتجه الذي طوله 5 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

نفرض المتجه $\vec{A} = (x, y)$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

اذن المتجه $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

@TTTT_MO

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) اتجاه المتجه $(-1, \sqrt{3})$ هو

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

2) اذا كان اتجاه المتجه يساوي $\frac{3\pi}{4}$ فإنّ المتجه هو :

a) $(1, 1)$ b) $(-1, 1)$ c) $(-1, -1)$ d) $(1, -1)$

3) اذا كان قياس زاوية المتجه $(k-1, 3)$ تساوي $45^\circ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإنّ k :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

## التمرينات

**جد طول واتجاه كل من المتجهات التالية ثم مثّله بالرسم :**

4) $(-2,2)$ 5) $(-3,0)$ 6) $(1,\sqrt{3})$

7) $(0,6)$ 8) $(\sqrt{3},-1)$ 9) $(-3,-3)$ 10) $(0,-8)$

جد المتجه الذي طوله واتجاهه كما يأتي :-

11) $\|\vec{A}\| = 3, Q = \frac{3\pi}{2}$ 12) $\|\vec{A}\| = \sqrt{2}, Q = \frac{\pi}{4}$ 13) $\|\vec{A}\| = 2, Q = \frac{\pi}{6}$

## مسائلُ حياتيةٌ



14) **كرة قدم :** يركض لاعب كرة قدم للامام ليضرب كرة بسرعة وزاوية معينة . فاذا كانت محصلة السرعة هي $\vec{V} = (4\sqrt{3}, 4)$ ، جد مقدار المحصلة واتجاه حركة الكرة .

15) **آلات :** يدفع محمد مقبض جزارة العشب بقوة 400 نيوتن بزاوية مقدارها $60^\circ$ مع الأرض ، اكتب المتجه الذي يمثل المسألة .




رابعيون
@TTTT_MO

# الدرسُ [4-2]

## العمليات على المتجهات — Operations on Vectors

**فكرة الدرس**
- *جمع المتجهات
- *طرح المتجهات
- *ضرب عدد حقيقي بالمتجه

**المفردات**
- * جمع المتجهات
- * طرح المتجهات

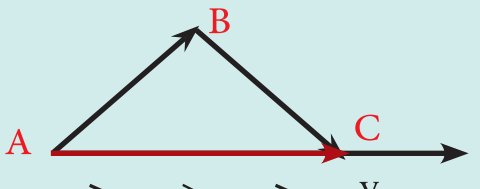
**تعلم**

انطلق منطاد بسرعة 8km/h في اتجاه شمال شرقي $30^\circ$ درجة هبَّ تيار هوائي بسرعة 1km/h باتجاه الشرق، كم صارت سرعة المنطاد ؟ وكيف صار اتجاهه؟ وجد محصلة المتجهين .

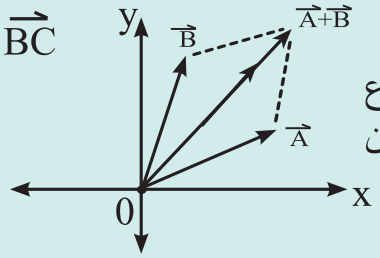


## [4-2-1] جمع المتجهات — Addition 0f Vectors

اولاً: هندسياً لجمع متجهين مثل $\vec{A}, \vec{B}$ ، هندسيا نرسم احدهما ، ومن نقطة انتهائه نرسم المتجه الاخر، ويكون المتجه الذي يبتدئ بنقطة بدء المتجه الاول ينتهي بنقطة انتهاء المتجه الثاني ، هو محصلة حاصل جمع المتجهين.




$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



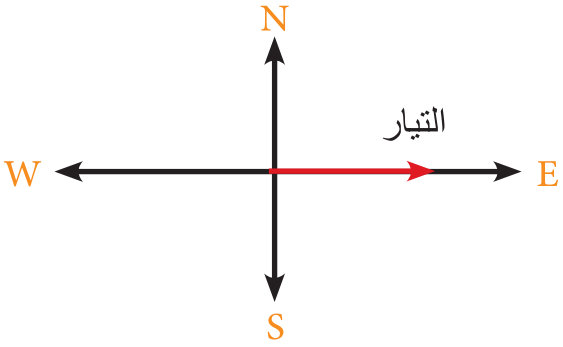

ثانياً: يتم ايجاد مجموع متجهين بطريقة متوازي الاضلاع اذ يمثل المجموع قطر متوازي الاضلاع ،حيث يكون المتجهان ضلعين متجاورين.

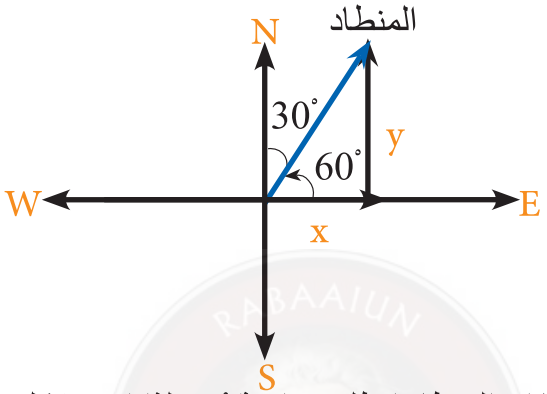
$\vec{A} = (x_1, y_1)$ $\quad \vec{B} = (x_2 + y_2)$

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)$$

**مثال (1)** **لحل السؤال في فقرة تعلّم نتبع ما يأتي :**

**أولاً )** نرسم




**ثانياً )** طول المتجه الذي يمثل حركة المنطاد هو 8km/h ، وبما ان المنطاد انطلق بزاوية $30^\circ$ لذا فهو يشكل زاوية قياسها $60^\circ$ مع المحور الموجب

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$
$$\Rightarrow x = 4$$

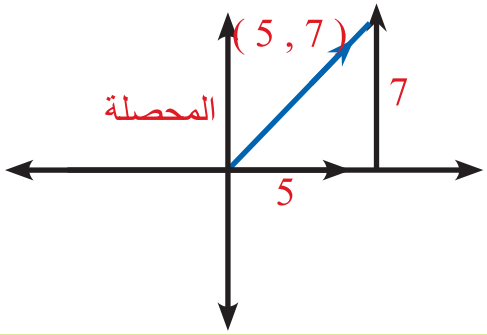
RABAAIUN
@TTTT_MO

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{8}$$

$$\Rightarrow y = 4\sqrt{3} \approx 7\text{km}$$

المتجه الذي يمثل حركة المنطاد هو ( 4 , 7 )

**ثالثاً )** بما أن التيار يتحرك بسرعة 1km/h باتجاه الشرق فان مكونه الأول يساوي1 ومكونه الثاني يساوي 0 . المتجه الذي يمثل حركة التيار هو ( 1 , 0 ) .




**رابعاً )** جد محصلة المتجهين وارسمه .

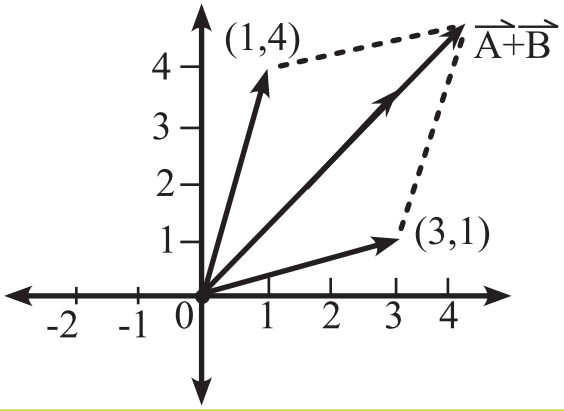
اجمع مكوني المتجه الأول مع مكوني المتجه الثاني

$$( 4 , 7 ) + ( 1 , 0 ) = ( 5 , 7 )$$

**مثال (2)**

اذا كان $\vec{A} = (3,1)$ , $\vec{B} = (1,4)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$ جبرياً وهندسياً

$$\vec{A} + \vec{B} = (3,1) + (1,4) = ( 3 + 1 , 1 + 4 ) = (4,5)$$




## [4-2-2] طرح المتجهات Subtraction of Vectors

اذا كان كل من $\vec{A}, \vec{B}$ متجها فان $\vec{A} - \vec{B}$ يعرف انه $\vec{A} + ( -\vec{B} )$ .

**مثال (3)**

اذا كان $\vec{A} = ( 5, 2 ) , \vec{B} = ( 2 , 3 )$ جد جبرياً $\vec{A} - \vec{B}$

i ) $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + ( -\vec{B} ) = ( 5 , 2 ) - ( 2, 3 )$

$= ( 5 , 2 ) + ( -2 , -3 )$

$= ( 3 , -1 )$

اذا كان $\vec{A} = ( 3 , 4 ) , \vec{B} = ( 3 ,1 )$ جد جبرياً $\vec{A} - \vec{B}$

ii ) $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + ( -\vec{B} ) = ( 3 , 4 ) - ( 3, 1 )$

$= ( 3 , 4 ) + ( -3 , -1 )$

$= ( 0 , 3 )$

رابعيون
@TTTT_MO

## [4-2-3] خواص جمع المتجهات — Properties of Vectors

**1- خاصية الانغلاق (Closed Property)**

اذا كان كل من $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجها فان $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ يمثل متجه

**2- خاصية التجميع (Associative Property)**

اذا كان كل من $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ متجها فإنَّ

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}+(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})$$

**3- خاصية التبديل (Commutative Property)**

اذا كان كل من $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجها فإنَّ

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})=(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A})$$

**4- خاصية المحايد (Identity Property)**

المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية الجمع في المتجهات ومعناه اذا كان $\overrightarrow{A}$ اي متجه فان

$$(0,0)+\overrightarrow{A}=\overrightarrow{A}+(0,0)=\overrightarrow{A}$$

**5-خاصية النظير الجمعي (Additive Invers)**

اذا كان $\overrightarrow{A}$ اي متجه فيوجد متجه اخر هو $\overrightarrow{B}=-\overrightarrow{A}$ بحيث

يسمى $-\overrightarrow{A}$ النظير الجمعي للمتجه $\overrightarrow{B}$

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})=(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A})=(0,0)$$

**6- خاصية الحذف (Elimination Property)**

اذا كان $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجها وأن $(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})=(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C})$ فإنَّ $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{C}$

## [4-2-4] ضرب المتجه بعدد حقيقي — Multiplication by a Real Number

اذا كان $\overrightarrow{A}=(x,y)$ وكان K عددًا حقيقيًا فان $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AK}=(Kx,Ky)$ .

**مثال (4)**

اذا كان $\overrightarrow{A}=(1,4), \overrightarrow{B}=(3,1)$ وكان $M=3$ , $L=4$ فجد

i) $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=\overrightarrow{A}+(-\overrightarrow{B})=(1,4)+(-3,-1)$

$=(-2,3)$

ii) $M\overrightarrow{A}-L\overrightarrow{B}=3(1,4)-4(3,1)$

$=(3,12)-(12,4)$

$=(3,12)+(-12,-4)$

$=(-9,8)$

RABAAIUN
رابعيون
@TTTT_MO

## [4-2-5] خواص عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي :
## Properties of the Process of Multiplying Vectors by a Real Number

**1- خاصية التوزيع ( Distribution property )**

اذا كان كل من $\overrightarrow{A}$ , $\overrightarrow{B}$ متجها، K عددًا حقيقيًا فان $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ متجها ايضا

$$(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\,K=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BK}=K\,(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\;=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}$$

**2- خاصية التجميع (Associative Property)**

لكل $\overrightarrow{A}$ متجه وكل من $M\,,\;L\in R$ يكون

$$(M\times L)\,\overrightarrow{A}=M\,(L\overrightarrow{A})\;=L\,(M\overrightarrow{A})$$

**3- خاصية الحذف (Elimination Property)**

اذا كان كل من $\overrightarrow{A}\,,\overrightarrow{B}$ متجه $M\in R$ حيث $M\neq 0$ وان $M\overrightarrow{A}=M\overrightarrow{B}$ فإنَّ $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$

**4- خاصية المحايد (Identity Property)**

$$\overrightarrow{I}\times\overrightarrow{A}=\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{I}=\overrightarrow{A}$$

## [4-2-6] متجه الوحدة Unit Vector

يسمى المتجه الذي مقداره وحدة واحدة متجه الوحدة ، ومن المفيد احيانا التعبير عن المتجه غير الصفري $\overrightarrow{C}$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{u_1}$ ، $\overrightarrow{u_2}$

1- متجه الوحدة الأساسي $u_1$ هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{u_1}=(1\,,0)$

2- متجه الوحدة الاساسي $u_2$ هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{u_2}=(0\,,1)$

اي بمعنى اذا كان $\overrightarrow{C}=(x\,,y)$ فان $\overrightarrow{C}=x\,(1\,,0)+y\,(0,1)$

اي بمعنى $\overrightarrow{C}=x\overrightarrow{u_1}+y\overrightarrow{u_2}$

وهذا يمثل المتجه $\overrightarrow{C}$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}$ .

**مثال (5)**

اذا كان $\overrightarrow{A}=(4\,,7)$ , $\overrightarrow{B}=(-5\,,3)$ جد $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ وعبِّر عن الناتج بدلالة متجهي الوحدة

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}&=(4\,,7)+(-5\,,3)\\&=(4+(-5)\;,\;(7+3))\\&=(-1\,,10)\\&=-1(1\,,0)+10\,(0\,,1)\\&=-\overrightarrow{u_1}+10\,\overrightarrow{u_2}\end{aligned}$$

رابعيون
@TTTT_MO

**مثال (6)** اكتب المتجهات التالية بصيغة الزوج المرتب الذي يمثلها :

واذا كتب المتجه بصيغة متجهي الوحدة فاننا نستطيع ايجاد الزوج المرتب الذي يمثّله .

i ) $\overrightarrow{A} = 4\overrightarrow{u_1} + 5\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{A} = (4, 5)$

ii) $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{B} = (2, 3)$

**مثال (7)**

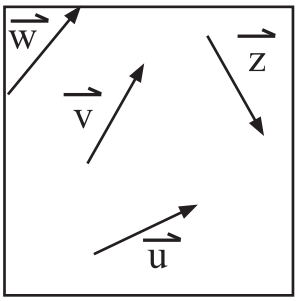
اذا كان $\overrightarrow{A} = (5, -3)$ , $\overrightarrow{B} = (-3, 4)$ وكان $L = 3$ , $M = 2$ جد $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{LB}$ ثم عبِّر بدلالة متجهي الوحدة

$$\overrightarrow{MA} = 2(5, -3) = (10, -6)$$
$$\overrightarrow{LB} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$$
$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{LB} = (10, -6) - (-9, 12)$$
$$= (10 + 9, -6 - 12)$$
$$= (19, -18)$$
$$= 19\overrightarrow{u_1} - 18\overrightarrow{u_2}$$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابةَ الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) انظر الشكل المجاور، أيّ متجه موازٍ للمتجه $(2, 1)$




a) $\overrightarrow{u}$ b ) $\overrightarrow{v}$ c ) $\overrightarrow{w}$ d ) $\overrightarrow{z}$

2) اتجاه المتجه $(-1, -\sqrt{3})$ هو

a) $\frac{\pi}{3}$ b ) $\frac{2\pi}{3}$ c ) $\frac{4\pi}{3}$ d ) $\frac{5\pi}{3}$

## التمرينات

**جد مقدار واتجاه كل من المتجهات التالية ومثِّلها بالمستوى الاحداثي .**

3) $(-2, -2)$ 4) $(0, 3)$ 5) $\sqrt{3}\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ 6) $-\overrightarrow{u_1} + \sqrt{3}\overrightarrow{u_2}$

**جد ناتج مايأتي :**

7) $(1,2) + (0,6)$ 8) $(-3,4) + (5,-2)$ 9) $(0,1) - (7,0)$ 10) $(8,3) - (-2,-1)$

**اجمع المتجهين ثم جد طول المتجه الناتج .**

11) $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ , $\overrightarrow{v} = (2.5, -1)$

RABAAIUN
@TTTT_MO

12) $\vec{u} = (6 , 0) , \vec{v} = (-2 , 4)$

13) $\vec{u} = (-2 , 7) , \vec{v} = (4.8 , -3.1)$

14) $\vec{u} = (-1.2, 8) , \vec{v} = (5.2 , -2.1)$

**عبِّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة $\vec{u_1}, \vec{u_2}$**

15) متجه طوله 3 واتجاهه $\frac{\pi}{3}$

16) متجه طوله 5 واتجاهه $\frac{\pi}{4}$

17) متجه طوله $\frac{3}{4}$ واتجاهه $\pi$

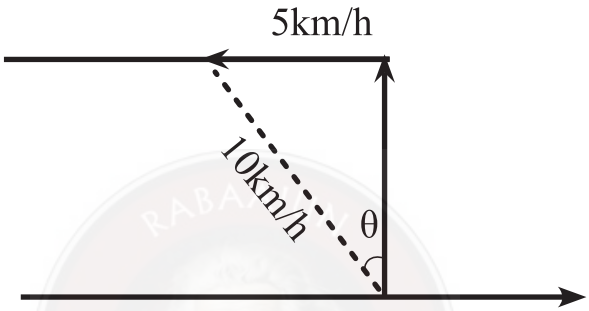
18) اذا كان $\vec{A} = (\sqrt{3} , 1)$ , $\vec{B} = (\sqrt{2} , \sqrt{3})$ وكان $K = 3 , L = -2$ فجد

$\vec{AL} + \vec{BK} , \vec{AL} - \vec{BK}$

## مسائلُ حياتيةٌ



19) **لعبة القفز:** عداء يركض الى الامام بسرعة $4\sqrt{2}$ m/s ليقفز من نقطة بسرعة 20m/s بزاوية $45^\circ$ مع المستوى الافقي ، أوجد محصلة السرعة .




20) **ملاحة :** قارب يبحر بسرعة 10km/h بالنسبة للماء الساكن ، يريد القارب عبور النهر بحيث يصل مباشرة الى نقطة المقابلة على الشاطيء الآخر ، اذا كانت سرعة تيار النهر هي 5km/h في اتجاه موازي للشاطيء ، جد تحديد اتجاه حركة القارب .

رابعيون
@TTTT_MO

# الدرسُ [4-3]

## المستقيمات المتوازية والمتعامدة

## Parallel and Perpendicular Lines

**فكرةُ الدرس**
- التمييز بين المستقيمات المتوازية.
- التمييز بين المستقيمات المتعامدة.

**المفردات**
- المستقيمات المتوازية.
- المستقيمات المتعامدة.

**تعلم**

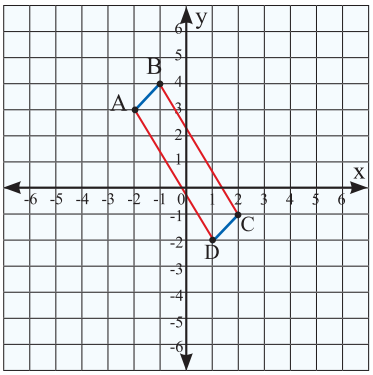
يظهر في الشكل المجاور عدة مستقيمات منها المتوازية ومنها المتعامدة. كيف نميز بين توازي هذه المستقيمات او تعامدها؟



## [4-3-1] المستقيمات المتوازية — Parallel Lines

تعرفت سابقاً الى توازي المستقيمات والشروط اللازمة لذلك:
فالمستقيمان المتوازيان: يقعان في مستوى واحد وليس بينهما نقطة مشتركة.
في هذا الدرس سوف نميز المستقيمان المتوازيان من خلال ميلهما:
يكون أيّ مستقيمين متوازيين عندما يتساوى ميلهما أو يشتركان بنقطتين أو أكثر :
الصيغة الرياضية : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

**مثال (1)** بيِّن ان النقط $D(1,-2), C(2,-1), B(-1,4), A(-2,3)$ رؤوس متوازي الاضلاع ABCD باستعمال الميل.



قانون الميل بين نقطتين: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overline{AB} = \frac{4-3}{-1-(-2)}$ بالتعويض

$m\overline{AB} = \frac{1}{1}$ بالتبسيط

$m\overline{AB} = 1$

$m\overline{CD} = \frac{-2-(-1)}{1-2}$ بالتعويض

$m\overline{CD} = \frac{-1}{-1}$ بالتبسيط

$m\overline{CD} = 1$

$m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ∵

$\overline{AB} // \overline{CD}$ ∴

و بالطريقة نفسها

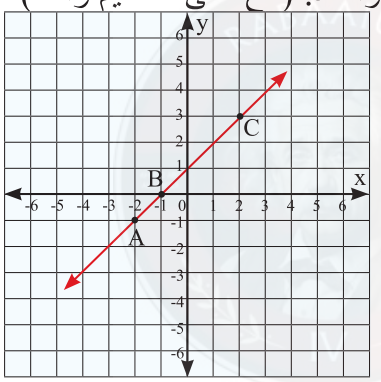
$m\overline{BC} = \frac{-5}{3}$

$m\overline{AD} = \frac{-5}{3}$

$\overline{AD} // \overline{BC}$ ∴

∴ الشكل ABCD متوازي اضلاع (تعريف متوازي الاضلاع)

**مثال (2)** اثبت ان النقط: $A(-2,-1), B(-1,0), C(2,3)$ تقع على استقامة واحدة. (تقع على مستقيم واحد) باستعمال الميل .



قانون ميل المستقيم: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)}$ بالتعويض

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{1}{1} = 1$ بالتبسيط

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3-0}{2-(-1)}$ بالتعويض

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3}{3} = 1$ بالتبسيط

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$ ∵

∴ النقط A,B,C تقع على استقامة واحدة. (اي تمثل خطًا مستقيمًا)

## [4-3-2] المستقيمات المتعامدة — Perpendicular Lines

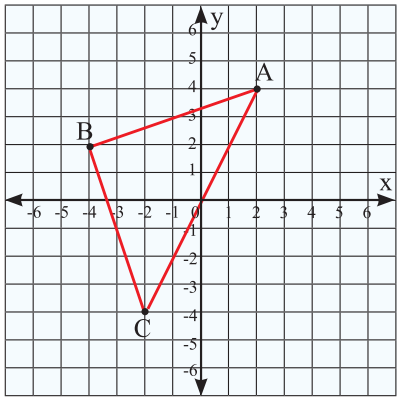
تعرفت سابقاً الى ان المستقيمين المتعامدين يلتقيان في نقطة واحدة ويصنعان اربعة زوايا قائمة ويقعان في مستوى واحد. في هذا الدرس سوف نميز المستقيمات المتعامدة من خلال ميلهما بشرط ألا يوازي اي منهما المحوريين الإحداثيين.

يكون المستقيمان متعامدين عندما يكون ميل أحدهما مقلوب ميل الآخر بعكس الإشارة.

أو حاصل ضربهما يساوي (-1) الصيغة الرياضية:

$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}$ أو ان: $m_1 \times m_2 = -1$ (بصورة عامة شرط ان ميل أحدهما لا يساوي صفر)

**مثال (3)** بيِّن ان النقط: $A(2,4), B(-4,2), C(-2,-4)$ رؤوس لمثلث قائم الزاوية. حدِّد الزاوية القائمة فيه باستعمال الميل




ميل المستقيم المار بنقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض

$m\overline{AB} = \frac{2-4}{-4-2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$m\overline{AC} = \frac{-4-4}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = \frac{2}{1}$

$m\overline{BC} = \frac{-4-2}{-2-(-4)} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{1}$

$\Rightarrow m\overline{AB} \times m\overline{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{-3}{1} = -1$

$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC} \Rightarrow m\angle B = 90^\circ$

**مثال (4)**

جد قيمة a التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين( 1 , 3 ) , ( -4 , a ) عموديًّا على المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{5}$

بما ان المستقيمين متعامدان، إذن ميل المستقيم المطلوب هو 5 (مقلوبه بعكس الإشارة)

ميل المستقيم المار بنقطتين وبالتعويض

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{-4-1}{a-3}$

الضرب التبادلي

$5a - 15 = -5$

بقسمة طرفي المعادل على 5

$5a = 10$

$a = 2$

@TTTT_MO

## الاختيار من متعدد

1) المستقيم المار بالنقطتين ( 7,1 ) , ( 1 , 9 ) يوازي المستقيم الذي ميله:

(a) $\frac{-3}{4}$ (b) $\frac{-4}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

2) اذا كان $m_1, m_2$ يمثلان ميلي مستقيمين متعامدين فإنَّ :

(a) $m_1 + m_2 = -1$ (b) $\frac{m_1}{m_2} = -1$ (c) $m_1 \times m_2 = -1$ (d) $m_1 - m_2 = -1$

3) اذا كان $m_1 = m_2$ يمثلان ميلي المستقيمين $L_1, L_2$ فإنَّ :

(a) $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ (b) $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ (c) $\overleftrightarrow{L_2}, \overleftrightarrow{L_1}$ متقاطعان (d) ليس بينهما اي علاقة

## التمرينات

4) المستقيم AB حيث A(0,2) , B(3,0) المستقيم CD حيث D(9,-4) , C(6,-2) والمستقيم EF حيث E(0,-5) , F(2,-2) ما علاقة المستقيم AB بالمستقيمين EF,CD ؟ بيِّن ذلك.

5) هل النقط A(0,-7) , B(1,-1) , C(2,3) تقع على مستقيم واحد؟ بيِّن ذلك.

6) المستقيم AB يمر بالنقطتين ( a,6 )B , ( -2,4 )A عمودي على المستقيم CD الذي يمر بالنقطتين ( 2,-7 )D , ( 6,-6 )C، جد قيمة a.

باستعمال الميل :

7) برهن ان الشكل ABCD متوازي اضلاع حيث: D(0,-4) , C(-3,0) , B(0,4) , A(3,0) .

8) برهن ان $\Delta$ ABC حيث: ( -4,-3 )C , ( -8,-2 )B , ( -5,-7 )A قائم الزاوية، ثم حدِّد الزاوية القائمة.

## مسائلُ حياتيةٌ

9) **فيزياء:** يمثل الجدول المجاور كمية المياه المتدفقة من احد السدود خلال مدة معينة من الزمن. هل بيانات الجدول تمثل خطًا مستقيمًا ،؟ بيِّن ذلك.

| المياه المتدفقة | |
|---|---|
| الزمن (ثوان) | حجم الماء $m^3$ |
| 5 | 75000 |
| 10 | 150000 |
| 15 | 225000 |

10) **هندسة:** برهن ان الشكل ABCD شبه منحرف. حيث ان احداثيات القاعدة العليا B(6,2) والقاعدة السفلى A(4,5)

C (2 , -1) ، D (5 , -2) . هل هو قائم الزاوية؟ بيِّن ذلك.

# الدرسُ [4-4]

## الميل ومعادلة المستقيم

## Slop and Equation of the line

**فكرة الدرس**
* ايجاد ميل المستقيم
* ايجاد معادلة المستقيم
* بعد نقطة عن مستقيم

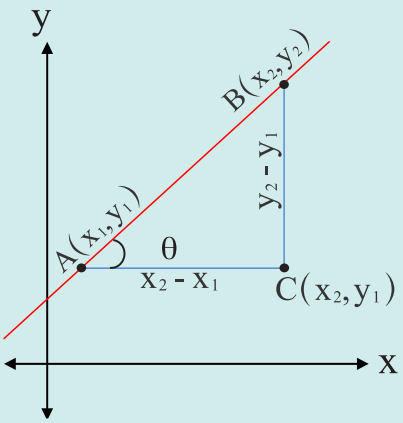
**المفردات**
* الميل
* البعد



**تعلم**

يقاس ميل الأرض كنسبة بين المسافة العمودية الى المسافة الافقية ويُطلق عليها بالانحدار فمثلا انحدار خط السكك الحديدية أقل من 2% بينما قد يصل انحدار الأرض في الجبال الى 4%.

تعلمت سابقاً انه في المستوي الإحداثي يكون ميل المستقيم هو النسبة بين الفرق بين الاحداثيين الصاديين لنقطتين على مستقيم الى الفرق بين الاحداثيين السينيين للنقطتين على المستقيم كما تلاحظ في الشكل المجاور وعليه فإن ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1.y_1)$ , $B(x_2,y_2)$ يكون




$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_1 \neq x_2$$

ولكن $$\tan\theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m = \tan\theta$$

وتعلمت المفاهيم الآتية:

**1)** يتساوى ميلا المستقيمين المتوازيين اي ان $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

**2)** يكون المستقيمان متعامدين عندما يكون حاصل ضرب ميليهما يساوي 1-.

$(\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2} , m_1 . m_2 = -1)$.

**3)** المستقيمات العمودية على محور السينات ليس لها ميل (ميلها غير معرف) لانه عندئذ $x_1 = x_2$

أما المستقيمات الموازية للمحور السيني فان ميلها يساوي صفراً.

## [4-4-1] ميل المستقيم باستعمال $\tan\theta$

## Slop of the line by using $\tan\theta$

اذا كانت $\theta$ قياسا للزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فان ميل المستقيم L يساوي $\tan\theta$ أي ان $m = \tan\theta$ حيث $\theta \in [0 , 90) \cup (90 , 180^\circ)$ .

**مثال (1)**

المستقيم L يمربنقطة الاصل والنقطة (2,2) فاذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها 45° فاحسب ميل المستقيم بدلالة $\theta$ tan وتاكد من الحلّ بطريقة اخرى.

$m = \tan\theta$ (قانون الميل بدلالة $\tan\theta$) $\Rightarrow m = \tan 45^\circ = 1$

طريقة أخرى للحلّ : قانون ميل المستقيم بدلالة نقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

رابعون @TTTT_MO

## [4-4-2] معادلة المستقيم — Equaition of the line

يمكن كتابة معادلة المستقيم لكل من الحالات الآتية :

1) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ عندما يمر المستقيم بالنقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

2) $(y - y_1) = m(x - x_1)$ اذا علم ميله m ونقطة من نقاطه $(x_1, y_1)$.

3) $y = mx + k$ اذا علم ميله ومقطعه الصادي، حيث m الميل، k مقطعه الصادي.

**ملاحظة :** يمكن ايجاد ميل المستقيم اذا علمت معادلته $ax + by + c = 0$ فان ميله : $m = \frac{-a}{b}$

**مثال (2)**

جد معادلة $\overleftrightarrow{L_1}$ المار بنقطه الاصل والعمودي على $\overleftrightarrow{L_2}$ الذي يصنع زاوية $30°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قانون ميل المستقيم بدلالة $\tan\theta$

$m\overleftrightarrow{L_2} = \tan 30$

$m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

مَيلا المستقيمين المتعامدين

$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-1}{m\overleftrightarrow{L_2}}$

$\Rightarrow m\overleftrightarrow{L_1} = -\sqrt{3}$

وبما ان المستقيم $L_1$ يمر بنقطة الاصل فيمكن استعمال قانون الميل والنقطة لايجاد معادلته

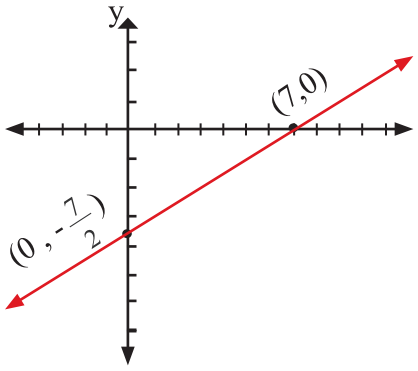
معادلة المستقيم

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x \Rightarrow y + \sqrt{3}x = 0$

**مثال (3)**

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (7,0) وميله $\frac{1}{2}$ وارسمه.




$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 0) = \frac{1}{2}(x - 7) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x - y - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x - 2y - 7 = 0$

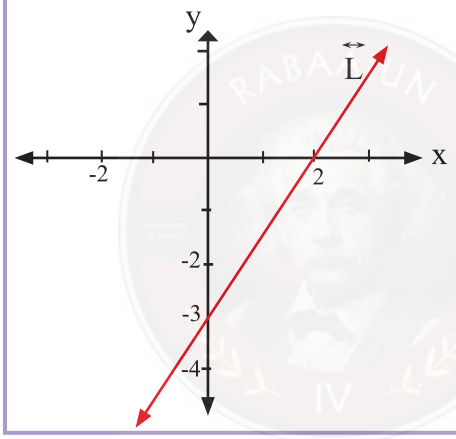
ولرسم المستقيم نجد تقاطعه مع المحور الصادي بجعل $x=0$

في معادلته $-2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{-2} \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$

فنحصل على النقطة $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ والتي من خلالها والنقطة المعطاة (7,0) يمكن رسم المستقيم.

**مثال (4)**

من الشكل المجاور، اكتب معادلة المستقيم L بدلالة الميل ومقطعه الصادي.




نلاحظ من الشكل المجاور ان المستقيم يمر بالنقطتين (2,0),(0,-3)

لذا يمكن ان نجد الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{0 - (-3)}{2 - 0} = \frac{3}{2}$

من الواضح ان المقطع الصادي هو -3 وبتطبيق العلاقة $y = mx + k$

نجد ان معادلة المستقيم هي $y = \frac{3}{2}x - 3$

RABAT-UN
@TTT_MO

**مثال (5)** جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (-2,3)، ويوازي المستقيم الذي يصنع زاوية $45^\circ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ليكن $L_1$ المستقيم الذي يصنع زاوية $45^\circ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

وليكن $L_2$ المستقيم الذي يمر بالنقطة (-2,3) والموازي للمستقيم $L_1$

$$m\overleftrightarrow{L_1} = \tan\theta \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_1} = \tan 45^\circ \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_1} = 1$$

المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل

$$\overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_1} \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_2} = m\overleftrightarrow{L_1} = 1$$

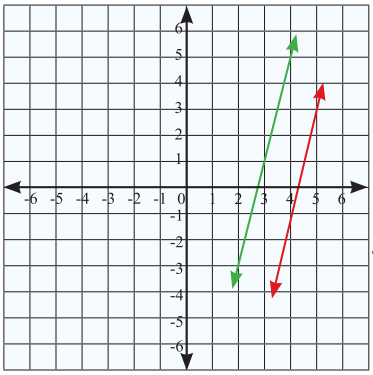
وبما أن المستقيم $L_2$ يمر بالنقطة (-2,3) فإن

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 1\ (x + 2$$

$$\Rightarrow x + 2 - y + 3 = 0 \Rightarrow x - y + 5 = 0$$

**مثال (6)** جد معادلة المستقيم المار بالنقطة C(5,3) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4,5), B(2,-3)$

نجد ميل المستقيم المار بالنقطتين A,B



ميل المستقيم المار بنقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-3 - 5}{2 - 4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

∵ المستقيمان متوازيان. ∴ ميل المستقيم المطلوب $m\overleftrightarrow{L_2} = 4$ (الميل نفسه).

نجد معادلة المستقيم المطلوب.

معادلة مستقيم ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويض $y - 3 = 4(x - 5)$

بالتبسيط $y = 4x - 17$ معادلة المستقيم المطلوب.

**مثال (7)** ليكن $\overleftrightarrow{L_1}: y = \frac{-5}{3}x + 4$ , $\overleftrightarrow{L_2}: y = \frac{5}{3}x + 4$ , $\overleftrightarrow{L_3}: y = \frac{-5}{3}x - 4$ أي المستقيمات متوازية. ولماذا؟

ميله ومقطعه الصادي $L_1: y = \frac{-5}{3}x + 4 \Rightarrow m_1 = \frac{-5}{3}$ , $k_1 = 4$

ميله ومقطعه الصادي $L_2: y = \frac{5}{3}x + 4 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3}$ , $k_2 = 4$

ميله ومقطعه الصادي $L_3: y = \frac{-5}{3}x - 4 \Rightarrow m_3 = \frac{-5}{3}$ , $k_3 = -4$

$m_1 = m_3 \Rightarrow L_1 \parallel L_3$ , $k_1 \neq k_3$

@TTTT_MO

**مثال (8)** جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(3,-4)$ والعمودي على المستقيم المار $A(0,3), B(2,-2)$ بالنقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بالتعويض في الميل والمستقيم المار بنقطتين $m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-2-3}{2-0} = \frac{-5}{2}$

$\because$ المستقيمان متعامدان $\therefore$ $m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{2}{5}$ (مقلوب ميل $\overleftrightarrow{L_1}$ بعكس الاشارة)

معادلة مستقيم ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويض $y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$

بالتبسيط $y = \frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$ معادلة المستقيم المطلوب.

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابةَ الصحيحة لكلٍّ مما يأتي:

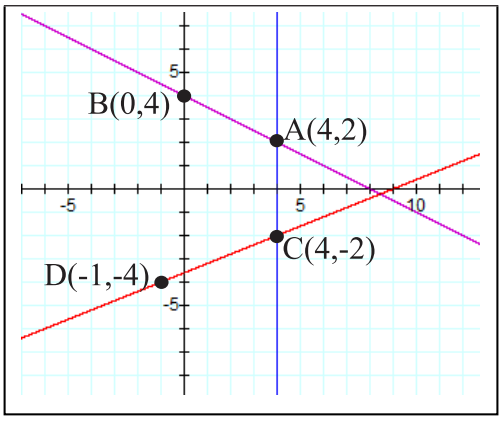
1) اذا كانت الزاوية $\theta$ التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب فان ميل المستقيم هو:

(a) $\sin\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\tan\theta$ (d) $\csc\theta$

2) معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3,4)$ والموازي لمحور الصادات هو:

(a) $y = -4$ (b) $x = -3$ (c) $y = 4$ (d) $x = 3$

## التمرينات




3) جد ميل كل مستقيم من المستقيمات في الرسم المجاور

(a) $m\overleftrightarrow{AB}$ (b) $m\overleftrightarrow{CD}$ (c) $m\overleftrightarrow{AC}$

4) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 2- ومقطعه الصادي 4 بدلالة (الميل والمقطع).

5) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-3}{4}$ ويمر بالنقطة $A(8,1)$.

6) جد معادلة المستقيم الذي يصنع زاوية $60^\circ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويمر بالنقطة $(1,-2)$.

7) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-5,2)$ ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ اذا علمت ان $B(7,4), C(2,1)$ ثم ارسمه.

8) جد ميل المستقيم AB اذا كانت $A(x-3,y)$ , $B(x,y+4)$.

9) اذا كان ميل المستقيم CD يساوي $\frac{2}{3}$ وكانت $D(8,r)$ , $C(16,2)$ فجد قيمة r.

## مسائلُ حياتيةٌ

10) من نقطة على سطح الارض رصد شخص طائرة على ارتفاع 10km وبزواية $60^\circ$ مع الافق اكتب معادلة المستقيم التي تربط موقع الشخص مع الطائرة.

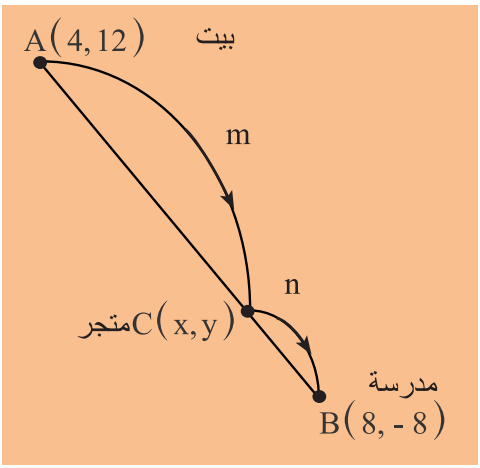
# الدرسُ [4-5] تقسيم قطعة مستقيم — Dividing a Segment

**فكرة الدرس**
* تعرف قانون نقطة المنتصف
* تعرف التقسيم الداخلي والخارجي لقطعة مستقيم

**المفردات**
* قانون نقطة المنتصف.
* نقطة المنتصف.
* التقسيم الداخلي
* التقسيم الخارجي

**تعلم**

متجر للتسوق يقع على طريق مستقيم بين بيت أسامة ومَدرسته، فإذا كان بُعد البيت عن المتجر ثلاثة أمثال بعد المتجر عن المدرسة، فجد إحداثيات موقع المتجر $C(x,y)$ إذا كانت إحداثيات البيت $A(4,12)$ والمدرسة $B(8,-8)$.

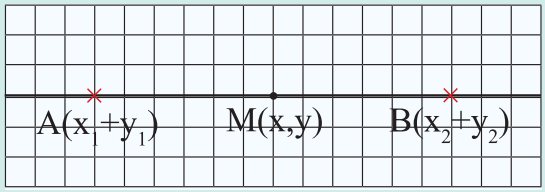



## [4-5-1] تقسيم قطعة مستقيم من الداخل — Dividing a Segment Internally

**نقطة المنتصف (MidPoint) :** هي النقطة الواقعة على بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيم و تنتمي له.

احداثيات نقطة المنتصف

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$




في هذا البند ستتعلم كيفية تقسيم قطعة المستقيم من الداخل بنسبة معينة ولنفرض ان $\overline{AB}$ قطعة مستقيم بحيث $A(x_1,y_1)$ , $B(x_2,y_2)$ وان المطلوب ايجاد $C(x,y)$ التي تقسم $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة $m:n$ ، لذلك بفرض $C(x,y)$ نقطة تقسيم قطعة المستقيم وان $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ فان احداثيي نقطة التقسيم C يمكن ايجادها كما يأتي:

$$C(x,y)=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \quad , \quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

**مثال (1)** جد احداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين $A(3,-8),B(3,6)$

قانون نقطة المنتصف

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

بالتعويض بالنقطتين

$$=\left(\frac{3+3}{2},\frac{-8+6}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$=\left(\frac{6}{2},\frac{-2}{2}\right)=(3,-1)$$

$\therefore (3,-1)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$

@TTTT_MO

**مثال (2)** اذا كانت $M(1,-3)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(-1,-2)$ ، جد احداثي النقطة B.

قانون نقطة المنتصف $M=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

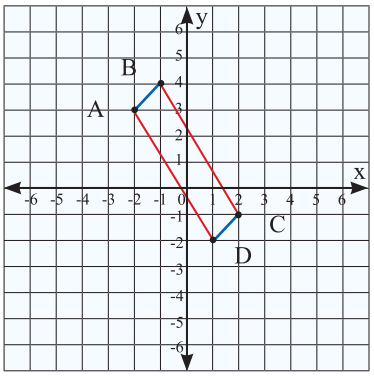
نفرض $B(x_2,y_2)$ وبالتعويض بالنقاط $(1,-3)=(\frac{-1+x_2}{2},\frac{-2+y_2}{2})$

الضرب التبادلي والتبسيط

$$1=\frac{-1+x_2}{2}\Rightarrow -1+x_2=2\Rightarrow x_2=3$$
$$-3=\frac{-2+y_2}{2}\Rightarrow -2+y_2=-6\Rightarrow y_2=-4$$

احداثيات B هي: $B(3,-4)$

**مثال (3)** بيِّن باستعمال قانون المنتصف ان النقط $A(-2,3),B(-1,4),C(2,-1),D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع.




قانون نقطة المنتصف $M=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

منتصف القطر $\overline{AC}$ : $M_1=(\frac{-2+2}{2},\frac{3+(-1)}{2})$ بالتعويض $M_1=(\frac{0}{2},\frac{2}{2})$ بالتبسيط $M_1=(0,1)$

منتصف القطر $\overline{BD}$ : $M_2=(\frac{-1+1}{2},\frac{4+(-2)}{2})$ بالتعويض $M_2=(\frac{0}{2},\frac{2}{2})$ بالتبسيط $M_2=(0,1)$

$\because M_1=M_2$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع (خواص متوازي الاضلاع قطراه احدهما ينصف الآخر)

**مثال (4)** من فقرة تعلم يمكن ايجاد موقع المتجر كما يأتي: ان بعد البيت عن المتجر يساوي ثلاثة امثال بعد المتجر عن المدرسة فهذا يعني ان نسبة التقسيم $\frac{3}{1}$ أو نكتبها بالشكل 3:1 نعوض $n=1$ ، $m=3$ في القانون نحصل:

إحداثيات نقطة التقسيم $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$ , $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$

بالتعويض والتبسيط

$$x=\frac{3(8)+1(4)}{3+1}=\frac{24+4}{4}=\frac{28}{4}=7$$
$$y=\frac{3(-8)+1(12)}{3+1}=\frac{-24+12}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

$C(x,y)=(7,-3)$ هي النقطة التي تمثل احداثي المتجر.

**مثال (5)** جد إحداثيي النقطة C التي تقسم القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة 2:1 اذا كانت $A(2,6)$ , $B(8,12)$.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{2(8)+1(2)}{2+1}=\frac{16+2}{3}=6\,,\ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}=\frac{2(12)+1(6)}{2+1}=\frac{30}{3}=10$$

$\therefore$ احداثيات النقطة هي $C(6,10)$

**مثال (6)** اذا كانت B(4,0) ، A(-3,-7) وكانت C(2 ,-2) تقسم القطعة $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة m:n فما هي نسبة التقسيم؟

إحداثيات نقطة المستقيم

مساواة الإحداثي السيني والتعويض

التبسيط

$$C(x,y)=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

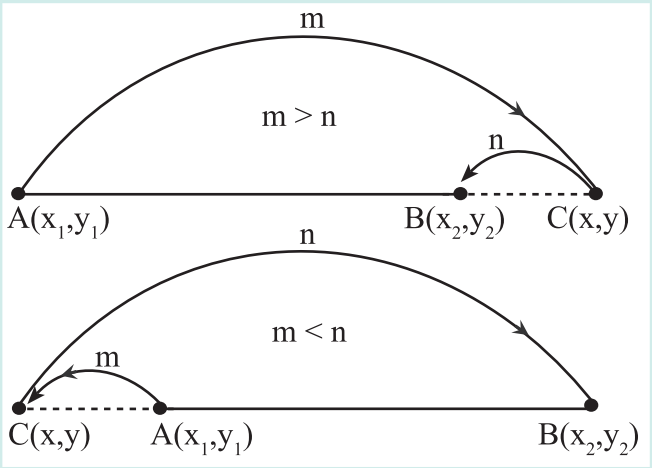
$$2=\left(\frac{m(4)+n(-3)}{m+n}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}2m+2n&=4m-3n\\5n&=2m\\\frac{m}{n}&=\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}$$

## [4-5-2] تقسيم قطعة مستقيم من الخارج Dividing a Segment Externally

بعد ان عرفت كيفية ايجاد نقطة التقسيم للقطعة المستقيمة AB من الداخل ستتعرف الان الى كيفية ايجاد التقسيم من الخارج، حيث اننا نقول عن نقطة مثل $C(x,y)$ بانها نقطة تقسيم للقطعة $\overline{AB}$ من الخارج حيث $A(x_1,y_1)$ , $B(x_2,y_2)$ عندما نأخذ امتداد القطعة $\overline{AB}$ الى النقطة $C(x,y)$ (أي C لا تنتمي للقطعة AB بل تنتمي الى امتدادها) وسيكون التقسيم $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ ويعطى احداثيي النقطة C بالقانون:

$$C(x,y)=\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\ ,\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$




**مثال (7)** إذا كانت $C(x,y)$ نقطة تقسيم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة 1:4 وكانت $A(2,2)$ , $B(5,5)$ ، فما إحداثيا C؟

بما ان C تقسم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة 1:4

إذاً

$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{4}\Rightarrow m=1\ ,\ n=4$

$C(x,y)=\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)=$ قانون تقسيم القطعة من الخارج $\Rightarrow\left(\frac{1(5)-4(2)}{1-4},\frac{1(5)-4(2)}{1-4}\right)$ التعويض

$C(x,y)=\left(\frac{-3}{-3},\frac{-3}{-3}\right)=(1,1)$

**مثال (8)** اذا كانت C(7,6) نقطة تقسيم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة m:n وكانت $A(3,2)$ , $B(1,0)$ ، فجد نسبة التقسيم.

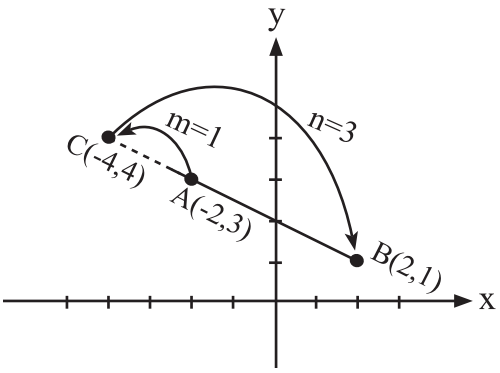
$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\Rightarrow 7=\frac{m(1)-n(3)}{m-n}\Rightarrow 7m-7n=m-3n$$

$$6m=4n\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

رابعيون
@TTTT_MO

**مثال (9)** جد احداثيات النقطة C التي تقسم $\overline{AB}$ من الخارج اذا كانت $A(-2,3)$ ، $B(2,1)$ في الحالتين:

**1)** النسبة 1:3 **2)** النسبة 3:1

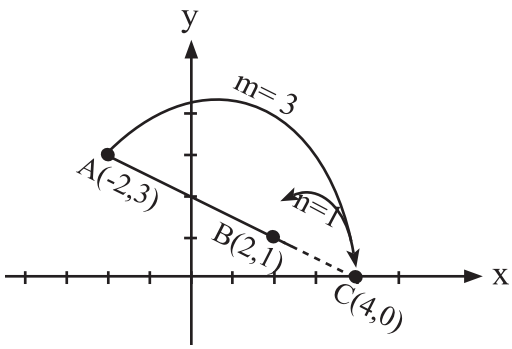



اولا: بما ان النسبة 1:3 إذاً $m=1\ ,\ n=3$

$$C(x,y)=\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1(2)-3(-2)}{1-3},\frac{1(1)-3(3)}{1-3}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{8}{-2},\frac{-8}{-2}\right)\Rightarrow C(x,y)=(-4,4)$$




ثانيا: النسبة 3:1

بما ان C تقسم القطعة بنسبة 3:1 $\Leftarrow$ $m=3\ ,\ n=1$

$$C(x,y)=\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3(2)-1(-2)}{3-1},\frac{3(1)-1(3)}{3-1}\right)=\left(\frac{6+2}{2},\frac{0}{2}\right)$$

$$C(x,y)=(4,0)$$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) إذا كانت C(x,y) نقطة منتصف $\overline{AB}$ فإن نسبة التقسيم هي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{1}$ (c) $\frac{1}{1}$ (d) ليس أي مما سبق

2) إذا كانت A(1,3) ، B(-4,-2) وكانت C(x,y) تقسم $\overline{AB}$ من الداخل بحيث 3AC=2CB ، فإن إحداثيات النقطة C(x,y):

(a) (-1,1) (b) (1,-1) (c) (1,0) (d) (0,1)

3) إذا كانت A(2,5) ، B(7,-1) والنقطة C(x,y) تقسم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة 3:2 ، فإن إحداثيي النقطة C(x,y):

(a) (17,13) (b) (17,-13) (c) (-17,13) (d) (13,15)

رابعيون
@TTTT_MO

## التمرينات

4) إذا كانت $B(12,20)$ ، $A(3,5)$ وكانت النقطة $C\ (x,y)$ تقسم $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة 2:1 ، فجد إحداثيي النقطة C.

5) جد احداثيات النقطة $C(x,y)$ التي تقسم القطعة $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة 3:1 اذاكانت $B\ (7,9)$ ، $A\ (5,7)$.

6) اذا كانت C نقطة تقسيم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة 2:3 وكانت $B\ (1,0)$ ، $A(3,2)$ فجد احداثيات C.

7) إذا كانت $C\ (1,-1)$ نقطة تقسيم $\overline{AB}$ من الخارج وكانت $B\ (4,2)$ ، $A\ (3,1)$ فما هي نسبة التقسيم؟

8) بين ان النقط الآتية $D\ (-4,7)$ ، $C\ (1,9)$ , $B(2,7)$ ، $A(-3,5)$ رؤوس متوازي الاضلاع باستعمال قانون نقطة المنتصف .

## مسائلُ حياتيةٌ



9) انطلق عمار بسيارته من بيته الواقع عند النقطة $A(-7,6)$ قاصدا متنزها يقع عند النقطة $B(2,3)$ وعلى طريق مستقيم فتوقف في محطة للتزود بالوقود عند النقطة $C(x,y)$ تقع في ربع المسافة من بيته الى المتنزه، فجد احداثيات النقطة $C(x,y)$ التي تقع عندها محطة الوقود.



10) دراجة تتحرك على مسافة مستقيمة من نقطة $A(-1,-1)$ الى $B(9,4)$ فاذا توقفت عند نقطة $C(x,y)$ والتي تمثل خمس المسافة من النقطة A الى النقطة B فما إحداثيات النقطة $C(x,y)$ التي توقفت عندها الدراجة؟



11) تحرك قطار مسافة مستقيمة من المحطة $A(5,-6)$ الى المحطة $B(-1,0)$ وتوقف بين المحطتين عند المحطة $C(x,y)$، أوجد إحداثيات المحطة $C(x,y)$ إذا علمت أن القطار قد توقف عند ثلثي المسافة من A باتجاه B.

# الدرسُ [4-6]

## المسافه بين نقطتين

## Distance Between Two Points

**فكرةُ الدرس**

* التعرف الى قانون المسافة بين نقطتين.
* تطبيق قانون المسافة بين نقطتين.

**المفردات**

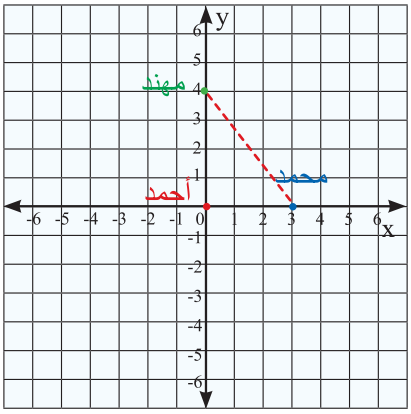
* قانون المسافة بين نقطتين.

**تعلم**

ثلاثة اصدقاء خرجوا في رحلة استكشافية، محددة مواقعهم كما في الشكل المجاور.

محمد يبعد من أحمد 3km ومهند يبعد من احمد 4km.

كيف تجد المسافه بين محمد و مهند؟




## [4-6-1] قانون المسافه بين نقطتين

## Distance between two Points Formula

تعلمت سابقاً: ان المسافة بين نقطتين على مستقيم يوازي محور السينات هي $|x_2 - x_1|$ وإن المسافة بين نقطتين على مستقيم يوازي محور الصادات هي $|y_2 - y_1|$ في هذا الدرس سوف نتعرف الى قانون المسافة في المستوي الاحداثي

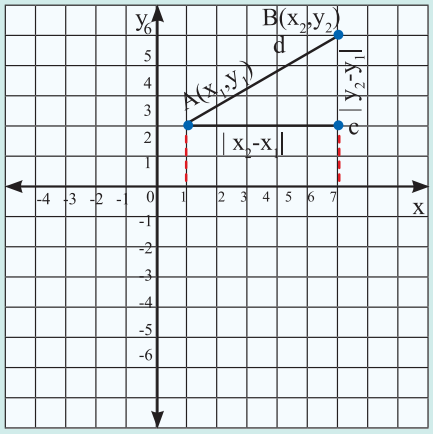
قانون المسافة بين نقطتين A,B يعتمد على مبرهنة فيثاغورس

المثلث ACB قائم الزاوية في C

مبرهنة فيثاغورس $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

بالتعويض $d^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$

بالتبسيط و جذر الطرفين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$




**مثال (1)** من فقرة تعلم: نجد ان موقع محمد هو النقطة $A(3,0)$ وان موقع مهند هو النقطة $B(0,4)$

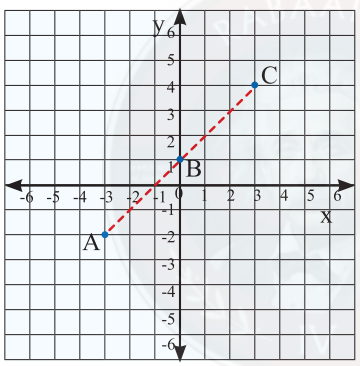
قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بالتعويض بالنقطتين $AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 - 0)^2}$

بالتبسيط $AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ المسافة بين محمد ومهند 5km

**مثال (2)** باستعمال قانون المسافة، أثبت أن النقط $A(-3,-2), B(0,1), C(3,4)$ تقع على استقامة واحدة.




قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بالتعويض من النقاط A,B,C

$AB = \sqrt{(0 + 3)^2 + (1 + 2)^2}$

$BC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 1)^2}$

$AC = \sqrt{(3 + 3)^2 + (4 + 2)^2}$

رابعيون
@TTTT_MO

بالتبسيط

$$AB = \sqrt{9+9}\ ,\ BC = \sqrt{9+9}\ ,\ AC = \sqrt{36+36}$$
$$AB = \sqrt{18}\ ,\ BC = \sqrt{18}\ ,\ AC = \sqrt{72}$$
$$= 3\sqrt{2}\ ,\ = 3\sqrt{2}\ ,\ = 6\sqrt{2}$$

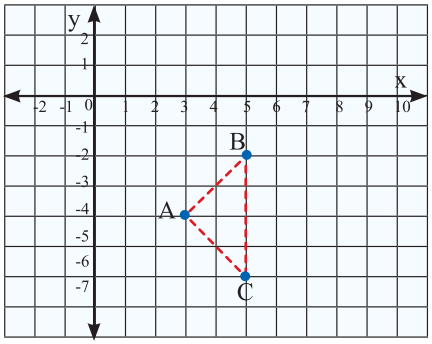
الكل يساوي مجموع الاجزاء $6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

اي: $AC = AB + BC$

اذن النقط A,B,C تقع على استقامة واحدة.

**مثال (3)** باستعمال قانون المسافة بيّن نوع المثلث الذي رؤوسه $A(3,-4), B(5,-2), C(5,-6)$ من حيث الاضلاع. وهل المثلث قائم الزاوية؟

قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$




بالتعويض من A,B,C

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+4)^2}$$
$$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (-6+2)^2}$$
$$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (-6+4)^2}$$

بالتبسيط

$$AB = \sqrt{4+4}\ ,\ BC = \sqrt{0+16}\ ,\ AC = \sqrt{4+4}$$
$$AB = \sqrt{8}\ ,\ BC = 4\ ,\ AC = \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2}\ ,\ = 4\ ,\ = 2\sqrt{2}$$

$\because AB = AC$ ، $\therefore$ المثلث متساوي الساقين

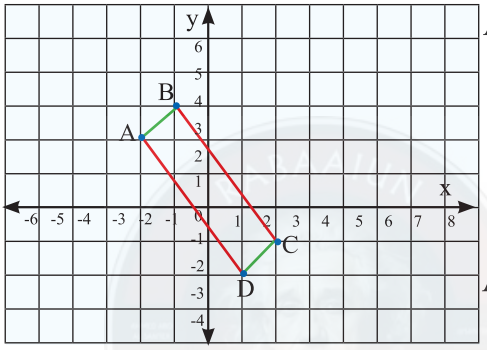
$(4)^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$

$16 = 16$

عكس مبرهنة فيثاغورس $\therefore$ المثلث قائم الزاوية في A.

**مثال (4)** بين باستعمال قانون المسافة ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع.

قانون المسافه بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$




$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-3)^2} \quad | \quad DC = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1} \quad | \quad = \sqrt{1+1}$$
$$= \sqrt{2} \quad | \quad = \sqrt{2}$$

$\therefore AB = DC$

بنفس الطريقة

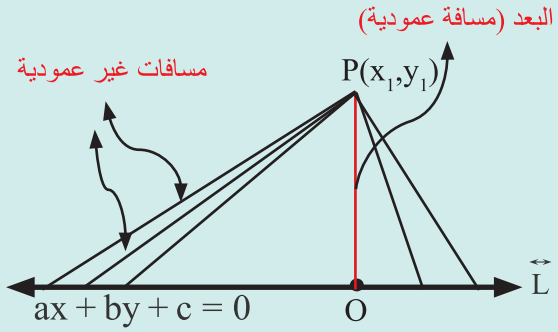
$$AD = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} \quad | \quad BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+25} \quad | \quad = \sqrt{9+25}$$
$$= \sqrt{34} \quad | \quad = \sqrt{34}$$

$\therefore AD = BC$

لذا الشكل ABCD متوازي اضلاع (خواص متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان)

## [4-6-2] البعد بين نقطة ومستقيم The distance between a point and a line

يمكن ان نفهم البعد بين مستقيم واية نقطة لا تقع عليه بانه طول القطعة المستقيمة العمودية على ذلك المستقيم من تلك النقطة وكما موضح في الشكل المجاور:




**تعريف:** يعرف بعد النقطة $P(x_1,y_1)$ عن المستقيم $\overleftrightarrow{L}: ax+by+c=0$ بأنه المسافة العمودية D بين النقطة P والمستقيم L والتي تعطى بالعلاقة:

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

**مثال (5)** جد طول العمود المرسوم من النقطة $p\ (4,-5)$ الى المستقيم الذي معادلته $3x-4y+8=0$

قانون المسافة بين نقطة ومستقيم

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بالتعويض والتبسيط

$$D=\frac{|3(4)+(-4)(-5)+8}{\sqrt{9+16}}=\frac{|12+20+8|}{5}=\frac{40}{5}=8$$

**مثال (6)** جد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم الذي ميله $\frac{-4}{3}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله وحدة طول واحدة.

بما ان المستقيم يقطع جزءاً من محور الصادات طوله وحدة طول واحدة فإن مقطعه الصادي k=1 (النقطة (0,1) تقع لى المستقيم). وبالاستفادة من الصيغة $y=mx+k$ نحصل على $y=\frac{-4}{3}x+1 \Rightarrow \frac{4}{3}x+y-1=0$

$$D=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

إذن يمكن إيجاد بعد نقطة الأصل عن المستقيم بتطبيق القانون

$$D=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{(\frac{-4}{3})^2+(1)^2}}$$

بالتعويض والتبسيط

$$D=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{9}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

**ملاحظة:** اذا كان $\overleftrightarrow{L_1}: ax+by+c_1=0$ , $\overleftrightarrow{L_2}: ax+by+c_2=0$ مستقيمان متوازيان فأنه يمكن ايجاد البعد بينهما ( البعد بين $\overleftrightarrow{L_1}\overleftrightarrow{L_2}$ ) من خلال $D=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**مثال (7)**

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{L_1}: x - 3y = 1$ , $\overleftrightarrow{L_2}: x - 3y = 4$

البعد بين اي مستقيمين متوازيين هو بعد اية نقطة تنتمي لاحدهما عن المستقيم الاخر.

الان في المستقيم $L_1$ عندما $y = 0$ نحصل: $x - 3(0) = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0) \in \overleftrightarrow{L_1}$

يمكن ايجاد بعد النقطة (1,0) عن المستقيم $\overrightarrow{L_2}: x - 3y - 4 = 0$ باستعمال الملاحظة وكما يأتي:

$$D = \frac{|(1)(1) - 3(0) - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$D = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|-3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

## الاختيار من متعدد

1) المسافة بين نقطتين: $(-5, 2)$ , $(3, 0)$ تساوي:

(a) $-2\sqrt{17}$ (b) $\sqrt{10}$ (c) $17\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{17}$

2) بعد النقطة (3,0) عن المستقيم $y = -3$ هو:

(a) 3 وحدات (b) 2 وحدة (c) 6 وحدة (d) ليس أي مما سبق

## التمرينات

3) **جد المسافة بين كلّ نقطتين فيما يأتي:**

**i)** (8,1) , (-4 , 3) ii) (6 , -9) , (0 , 2) iii) (-2 , 4) , (-6 , -2)

4) استعمال قانون المسافة بين نقطتين، أثبت ان النقط A(1 , -3) , B (3 , -4) ,C (-1 , -2) على استقامة واحدة.

5) بيِّن نوع المثلث الذي رؤوسه A(2 , -1) , B (2 , 1) ,C (-1 , -1) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين من حيث الاضلاع وهل المثلث قائم الزاوية ؟

6) بيِّن ان النقط الآتية: A (-3 , 5) , B (2 , 7) , C (1 , 9) , D (-4 , 7) رؤوس متوازي الاضلاع باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

7) جد البعد بين النقطة P (3 , 1) والمستقيم $-6x - 3y = 9$ .

8) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $\overrightarrow{L_2}: y = 15$ , $\overrightarrow{L_1}: y = 2x + 10$ بطريقتين.

## مسائلُ حياتيةٌ

9) **هندسة :** ABC مثلث رؤوسه A(6 , 4) , B (-2 , 6) ,C (0 , -4) ، تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث.

10) **تحديد موقع :** موقع بيت محمود عند النقطة (0 , -4) وموقع مدرسته عند النقطة (-3 , 0) ما المسافة التي يقطعها محمود عند ذهابه الى المدرسة، علماً ان طول ضلع كلّ مربع في المستوي الاحداثي يمثل كيلومتراً واحداً؟

**جد طول واتجاه كل متجه مما يأتي :**

1 $(-2, -2\sqrt{3})$ 2 $(0, -8)$

3 جد قيمة K اذا كان قياس زاوية المتجه $(1, K-2)$ تساوي $60^\circ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

**جد المتجه في الحالات التالية ومثّله في المستوى الإحداثي:**

4 طوله 4 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$ 5 طوله 3 وحدات واتجاهه $\frac{3\pi}{2}$

**بدلالة متجهي الوحدة اذا كانت $\vec{A} = (2,1)$ , $\vec{B} = (-2, -3)$ ، جد ناتج مايأتي :**

6 $2\vec{A} - 3\vec{B}$ 7 $\vec{B} - 2\vec{A} + (-2, 3)$

8 جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم $\overleftrightarrow{L} : 4x - 2y + 12 = 0$ .

9 جد البعد بين النقطة والمستقيم المار بالنقطة $(-3,-4)$ والموازي للمستقيم الذي معادلته $6x - 8y - 5 = 0$.

10 جد احداثيات النقطة $C(x, y)$ التي تقسم القطعة $\overline{AB}$ من الداخل بحيث $3AC = 5CB$ وكانت $A(3, -4)$ ، $B(-5, 4)$ .

11 جد احداثيات النقطة $C(x,y)$ التي تقسم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة 7:2 إذا كانت، $A(1,3)$ ، $B(-1,-2)$

12 ما البعد بين النقطة $A(-1,5)$ والمستقيم الذي معادلته $4x = 5y + 12$ ؟

13 أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $2y - x = 7$ وينصف القطعة الواصلة بين النقطتين $(3, 1)$ ، $(1, -5)$.

14 أذا كانت النقاط $C(-2, b-4)$ ، $B(-1, 2)$ ، $A(0, b)$ على استقامة واحدة ، فما قيمة b .

# الفصلُ 5

# الإحصاء

# Statistics


الدرس [5-1] مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي)

الدرس [5-2] مقاييس النزعة المركزية (الوسيط)

الدرس [5-3] مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

الدرس [5-4] مقاييس التشتت




توظف كل شركة كبيرة أقسامها أو شركات الأبحاث الإحصائية الخاصة بها للبحث في القضايا المتعلقة بالمنتجات، والموظفين، وخدمة العملاء، وما إلى ذلك..
يعتمد نجاح الأعمال على معرفة ما هو فعال وما هو غير ذلك.

# الاختبارُ القبليّ

1 **جد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الآتية :**

6, 2, 6, 5, 4, 9, 7

2 **جد وسيط مجموعة البيانات الآتية :**

12, 3, 4, 6, 9, 11, 3, 7

3 **جد منوال مجموعة البيانات الآتية :**

3, 2, 5, 6, 8, 2, 2, 8

4 **لمجموعة البيانات التالية، جد الوسط الحسابي والمنوال والوسيط :**

12, 11, 13, 9, 8, 9, 11, 15, 10

5 **عرِّف العينة، وما هي علاقتها بالمجتمع؟ اعط مثالا يوضح ذلك.**

6 **اختر الكلمة المناسبة من اللائحة كي تكمل كل جملة .**

- الوسط الحسابي
- الوسيط
- المنوال
- المدى

أ - ..... هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة في مجموعة البيانات غير مبوبة .

ب - ..... هو الاكثر تكراراً في مجموعة البيانات غير مبوبة .

جـ ..... هو القيمة التي تنصف مجموعة البيانات غير مبوبة .

7 **املأ الفراغ بكلمة مناسبة من بين الأقواس:**

أ- يفضل استعمال ..... عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات

(الوسط الحسابي - المنوال - الوسيط)

ب- يفضل استعمال ..... عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات

(الوسط الحسابي - المنوال - الوسيط)

جـ - إذا كان لكل فرد من العينة الاحتمال نفسه في الاختيار عندئذ تسمى العينة .....

(متحيزة ، غير متحيزة)

# الدرسُ [5-1]

## مقاييس النزعة المركزية ( الوسط الحسابي )

## Measures of Central Tendency (Arithmetic mean)

**فكرة الدرس**

* احتساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

**المفردات**

* الوسط الحسابي

**تعلم**

طلب منك مدرس الرياضة تمثيل أوزان كل طلبة صفك بقيمة واحدة.
كيف يمكنك فعل هذا؟



في المراحل الدراسية السابقة درسنا طرائق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً.
في هذه المرحلة سنبحث عن مقياس يكون معبراً عن الظاهرة المراد دراستها وممثلاً لها، أي نريد الحصول على قيمة واحدة تُعبر عن جميع القيم، فمتوسط الوزن مثلاً في صفك يعبر عن جميع اوزان كل الطلبة في صفك.
ان من خصائص البيانات، أن لها نزعة او ميلاً لانها تتركز حول قيمة معينة متوسطة، وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات او مقاييس النزعة المركزية.
والاكثر شيوعاً للنزعة هي: (الوسط الحسابي)، الوسيط والمنوال.
في المراحل السابقة درستها للبيانات غير المبوبة والان سنتناولها للبيانات المبوبة.

## (الوسط الحسابي) Arithmetic mean

ان خطوات ايجاد المتوسط في حالة البيانات المبوبة هي كما في جدول الاجراءات الآتي:

**جدول الاجراءات:** إيجاد الوسط الحسابي بيانات مبوبة

**الخطوة 1:** عمل جدول على النحو الآتي:

| A<br>الفئة | B<br>التكرار $f_m$ | C<br>نقطة المنتصف $x_m$ | D<br>$f_m.x_m$ |
|---|---|---|---|

**الخطوة 2:** إيجاد نقطة المنتصف $x_m$ لكل فئة ووضعها في العمود C. نقطة المنتصف للفئة تساوي حاصل جمع حديها الاعلى والادنى مقسوما على 2.

**الخطوة 3:** لكل فئة، ضرب التكرار $f_m$ في نقطة المنتصف $x_m$ ووضع حاصل الضرب في العمود D.

**الخطوة 4:** ايجاد مجموع القيم في العمود D.

**الخطوة 5:** قسمة مجموع القيم في العمود D على مجموع التكرارات في العمود B.

ان صيغة ايجاد الوسط الحسابي التي تتمثل بالشكل $\bar{x} = \frac{\sum_{m}^{k} f_m x_m}{n}$ حيث ان k تمثل عدد الفئات وان مجموع التكرارات هو $n = \sum_{m-1}^{k} f_m$ .

**مثال (1)** استخدم التوزيع التكراري التالي الذي يمثل اوزان طلبة الصف الرابع العلمي في احدى المدارس (بالكيلوغرام) لايجاد الوسط الحسابي اوزان هؤلاء الطلبة.

| الفئة | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 5 | 18 | 4 | 1 | 30 |

نعمل الجدول التالي، حيث ان :

| A الفئة | B التكرار $f_m$ | C نقطة المنتصف $x_m$ | D $f_m.x_m$ |
|---|---|---|---|
| 30-39 | 2 | (30+39)/2= 34.5 | 69 |
| 40-49 | 5 | (40+49)/2= 44.5 | 222.5 |
| 50-59 | 18 | (50+59)/2= 54.5 | 981 |
| 60-69 | 4 | (60+69)/2= 64.5 | 258 |
| 70-79 | 1 | (70+79)/2= 74.5 | 74.5 |
| المجموع | 30 | | 1605 |

**1.** نقطة المنتصف للفئة الاولى هي $x_1 = \frac{30+39}{2} = 34.5$ وللفئة الثانية هي، $x_2 = \frac{40+49}{2} = 44.5$ وهكذا.

**2.** لكل فئة، نضرب التكرار الحاصل في تلك الفئة في نقطة منتصف الفئة ونضع نتائج الضرب في العمود D. فالفئة الاولى يكون ناتج الضرب هو 2×34.5=69 وللفئة الثانية يكون 5×44.5=222.5 ، وهكذا.

وبقسمة حاصل جمع النتائج في العمود D على n نحصل على قيمة الوسط الحسابي على النحو الآتي،

$$\bar{x} = \frac{\sum_m^k f_m x_m}{n} = \frac{1605}{30} = 53.5 \text{ كيلو غرام}$$

اي ان قيمة الوسط الحسابي اوزان الطلبة تبلغ 53 .5 كيلو غرام، ويمكن اعتبارها تمثل معدلاً لاوزان جميع الطلبة في العينة.

**مثال (2)** الجدول التالي يمثل توزيع اعمار الاشخاص (بالسنوات) الذين بدأوا مشاريع شركات صغيرة في مدينة البصرة. جد الوسط الحسابي الاعمار.

| الفئة | 25-31 | 32-38 | 39-45 | 46-52 | 53-59 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 11 | 25 | 14 | 7 | 3 | 60 |

نعمل الجدول التالي، وبقسمة حاصل جمع النتائج في العمود D على n نحصل على قيمة الوسط الحسابي للأعمار على النحو التالي،

| A الفئة | B التكرار $f_m$ | C نقطة المنتصف $x_m$ | D $f_m.x_m$ |
|---|---|---|---|
| 25-31 | 11 | (25+31)/2=28 | 308 |
| 32-38 | 25 | (32+38)/2=35 | 875 |
| 39-45 | 14 | (39+45)/2=42 | 588 |
| 46-52 | 7 | (46+52)/2=49 | 343 |
| 53-59 | 3 | (53+59)/2=56 | 168 |
| المجموع | 60 | | 2282 |

$$\bar{x} = \frac{\sum_m^k f_m x_m}{n} = \frac{2282}{60} = 38.033 \approx 38$$

رابعيون
@TTTT_MO

## الاختيار من متعدد

اخترِ الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) الوسط الحسابي للأعداد 3 , 8 , 8 , 10 ,6 هو:

(a) 3 (b) 8 (c) 7 (d) 10

2) الوسط الحسابي للقيم في الجدول التكراري الآتي :

| الفئة | 3-5 | 6-8 | 9-11 |
|---|---|---|---|
| التكرار | 1 | 3 | 6 |

(a) 8.5 (b) 9.5 (c) 8 (d) 9

## التمرينات

3) احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

| الفئة | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 10 | 28 | 19 | 4 | 6 | 3 |

4) احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

| الفئة | 51-55 | 56-60 | 61-65 | 66-70 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 7 | 8 | 4 |

## مسائلُ حياتيةٌ

5) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الاميال المقطوعة (بالمئات) لعينة مؤلفة من 20 سائق شاحنة يعملون لصالح وزارة التجارة العراقية. احسب الوسط الحسابي لعدد الاميال المقطوعة.

| الفئة | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 20 |

6) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الطلبات الواصلة كل يوم خلال الخمسة وخمسين يوما الماضية لمكتب احدى الشركات. احسب الوسط الحسابي .

| عدد الطلبات | 10-12 | 13-15 | 16-18 | 19-21 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f | 6 | 13 | 21 | 15 | n=55 |

# الدرسُ [5-2]

## مقاييس النزعة المركزية ( الوسيط )
## Measures of Central Tendency ( The Median)

**فكرة الدرس**

* احتساب الوسيط لبيانات مبوبة

**المفردات**

* الوسيط



**تعلم**

أعتمدت لجنة في إحدى الكليات لاختيار عدد من المتقدمين لهذه الكلية بحسب مفهوم الوسيط، كيف يمكنها عمل ذلك ؟

## الوسيط The mediam

إن خطوات ايجاد الوسيط في حالة **البيانات المبوبة** هي كما في جدول الاجراءات الآتي :

**جدول الاجراءات:** ايجاد وسيط بيانات مبوبة

الخطوة 1:تحديد الفئة التي تتضمن الوسيط

اي ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f_m}{2}$

الخطوة 2: تكوين جدول التوزيع التكراري، بحيث يحتوي على التكرار المتجمع الصاعد.

الخطوة 3: احتساب الوسيط باستخدام الصيغة الآتية :

$$ME = L_{me} + \left[ \frac{\frac{\sum f_m}{2} - F}{f_m} \right] \times (w)$$

حيث: الوسيط ME، F : يمثل التكرار المتجمع الصاعد السابق للتكرار المتجمع للفئة الوسيطية

$f_m$ : التكرار للفئه الوسيطية

$L_{me}$ : الحد الادنى للفئه الوسيطية

w : طول الفئة

**مثال (1)** تم اختيار 54 متقدمًا لاحدى الكليات بشكل عشوائي. التوزيع التكراري التالي يمثل درجات امتحان المفاضلة لهؤلاء المتقدمين. جد الوسيط.

| الفئة (الدرجات) | 90-98 | 99-107 | 108-116 | 117-125 | 126-134 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 11 | 21 | 15 | 4 | 54 |

@TTTT_MO

الخطوة 1: نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

| الفئة | التكرار f | الصاعد F |
|---|---|---|
| 90-98 | 3 | 3 |
| 99-107 | 11 | 3+11=14 |
| 108-116 | 21 | 14+21=35 |
| 117-125 | 15 | 35+15=50 |
| 126-134 | 4 | 50+4=54 |
| | 54 | المجموع |

الخطوة 2: نجد ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f_m}{2}$

$\frac{\sum f_m}{2} = \frac{54}{2} = 27$

$\frac{\sum f_m}{2} = 27$ تقع بين 14 , 35

التكرار المتجمع الصاعد $F = 14$ السابق للفئه الوسيطية

التكرار للفئة الوسيطية $f_m = 21$

الفئة التي تناظر $f_m$ هي (108 - 116) فيكون $L_{me} = 108$

$w = 116 - 108$

$w = 8$

صيغة الوسيط

$$ME = L_{me} + \left[\frac{\frac{\sum f_m}{2} - F}{f_m}\right] \times (w)$$

$$ME = 108 + \left[\frac{27 - 14}{21}\right](8)$$

$$ME = 112.95$$

**مثال (2)** جدول التوزيع التكراري التالي يحتوي على درجات الحرارة العليا في 68 مدينة عراقية. احسب وسيط درجات الحرارة.

| الفئة (درجات الحرارة) | 20-27 | 28-35 | 36-43 | 44-51 | 52-59 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 6 | 10 | 13 | 27 | 12 | 68 |

| الفئة | التكرار | F |
|---|---|---|
| 20-27 | 6 | 6 |
| 28-35 | 10 | 6+10 =16 |
| 36-43 | 13 | 16+13 =29 |
| 44-51 | 27 | 29+27 =56 |
| 52-59 | 12 | 56+12 =68 |
| | 68 | المجموع |

الخطوة **1:** نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

$\frac{\sum f_m}{2} = 34$ تقع بين 29 , 56

الخطوة **2:** نجد ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f_m}{2}$

$\frac{\sum f_m}{2} = \frac{68}{2} = 34$

رابعيون
@TTTT_MO

التكرار المتجمع الصاعد السابق للتكرار المتجمع للفئة الوسيطية

$f_m = 27$ ، $F = 29$

الفئة الوسيطية التي تقابل $f_m$ : هي (44 - 51)

$\therefore L_m = 44$

$w = 51 - 44$

$w = 7$

صيغة الوسيط :

$$ME = L_{me} + \left[\frac{\frac{\sum f_m}{2} - F}{f_m}\right] \times (w)$$

$$= 44 + \left[\frac{34 - 29}{27}\right] \times (7)$$

$$= 45.296$$

**مثال (3)** جد الوسيط لبيانات الجدول التكراري الآتي :

| الفئة | 12-20 | 21-29 | 30-38 | 39-47 | 48-56 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 4 | 2 | 3 | 7 | 8 | 24 |

نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

| الفئة | التكرار | F |
|---|---|---|
| 12-20 | 4 | 4 |
| 21-29 | 2 | 2 + 4 = 6 |
| 30-38 | 3 | 6 + 3 = 9 |
| 39- 47 | 7 | 9 + 7 = 16 |
| 48-56 | 8 | 18 + 8 = 24 |
| المجموع | 24 | |

$\frac{\sum f_m}{2} = \frac{24}{2} = 12$ تقع بين 9 , 16

$F = 9$ ، $f_m = 7$

الفئة الوسيطية هي ( 39-47) فيكون

$L_{me} = 39$ , $w = 8$

$$ME = L_{me} + \left[\frac{\frac{\sum f_m}{2} - F}{f_m}\right] \times (w)$$

$$ME = 39 + \left[\frac{12 - 9}{7}\right] \times (8)$$

$$ME = 42.43$$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) الوسيط للأعداد 2, 7, 4, 13, 8, 9 هو:

(a) 7 (b) 8 (c) 7.5 (d) 13

2) الوسيط للقيم في الجدول التكراري الآتي :

| الفئة | 6-8 | 9-11 | 12-14 | 15-17 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 2 | 3 | 4 |

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12

3) $L_{me}$ في الفئة ( 10 -12 ) هي :

(a) 10 (b) 12 (c) 2 (d) 22

## التمرينات

4) احسب الوسيط للتوزيع التكراري التالي:

| الفئة | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 10 | 28 | 19 | 4 | 6 | 3 |

5) احسب الوسيط للتوزيع التكراري الآتي :

| الفئة | 51-55 | 56-60 | 61-65 | 66-70 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 7 | 8 | 5 |

## مسائلُ حياتيةٌ

6) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الاميال المقطوعة (بالمئات) خلال اسبوع واحد لعينة مؤلفة من 20 سائق شاحنة يعملون لصالح وزارة التجارة العراقية. احسب الوسيط لعدد الاميال المقطوعة.

| الفئة | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 20 |

7) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الطلبات الواصلة كل يوم خلال الاربعة وخمسين يوما الماضية لمكتب احدى الشركات. احسب الوسيط.

| عدد الطلبات | 10-12 | 13-15 | 16-18 | 19-21 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f | 6 | 13 | 20 | 15 | n=54 |

# الدرسُ [5-3]

## مقاييس النزعة المركزية ( المنوال )

## Measures of Central Tendency ( The Mode)

**فكرة الدرس**

* احتساب المنوال لبيانات مبوبة

**المفردات**

* المنوال

**تعلم**

أعتمدت لجنة في إحدى الكليات لاختيار عدد من المتقدمين لهذه الكلية بحسب مفهوم المنوال ، كيف يمكنها عمل ذلك ؟



## المنوال The mode

لإيجاد المنوال في حالة **البيانات المبوبة**

1) نحدد الحد الادنى للفئة المنوالية، (التي تقابل أكبر تكرار)

ولتكن $L_{mo}$

2) نجد: $\Delta_1$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي قبلها

$\Delta_2$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي بعدها

w = طول الفئة

صيغة المنوال :

$$MO = L_{mo} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right](w).$$

**مثال (1)** تم اختيار 54 متقدم لاحدى الكليات بشكل عشوائي. التوزيع التكراري التالي يمثل درجات امتحان المفاضلة لهؤلاء المتقدمين. جد المنوال .

| (الدرجات) الفئة | 90-98 | 99-107 | 108-116 | 117-125 | 126-134 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 11 | 21 | 15 | 4 | 54 |

| الفئة | التكرار |
|---|---|
| 90-98 | 3 |
| 99-107 | 11 |
| 108-116 | 21 |
| 117-125 | 15 |
| 126-134 | 4 |
| المجموع | 54 |

$\Delta_1$ ← 11 → 21

$\Delta_2$ ← 21 → 15

الحد الادنى للفئة المنوالية (108 - 116)

$\therefore L_{mo} = 108$

تقابل اكبر تكرار (21)

$\Delta_1 = 21 - 11$

$\Delta_1 = 10$

$\Delta_2 = 21 - 15$

$\Delta_2 = 6$

$w = 116 - 108$

$w = 8$

صيغة المنوال:

$$MO = L_{mo} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] \times (w)$$
$$= 108 + \left[\frac{10}{10+6}\right] \times (8)$$
$$= 108 + \frac{10}{16}(8)$$
$$= 108 + 5$$
$$MO = 113$$

**مثال (2)**

جدول التوزيع التكراري التالي يحتوي على درجات الحرارة العليا في 68 مدينة عراقية. احسب المنوال .

| الفئة (درجات الحرارة) | 20-27 | 28-35 | 36-43 | 44-51 | 52-59 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 6 | 10 | 13 | 27 | 12 | 68 |

| الفئة | التكرار f |
|---|---|
| 20-27 | 6 |
| 28-35 | 10 |
| 36-43 | 13 |
| 44-51 | 27 |
| 52-59 | 12 |
| المجموع | 68 |

$\Delta_1$ ← 36-43 / 44-51

$\Delta_2$ ← 44-51 / 52-59

الحد الادنى للفئة المنوالية (51 - 44)

$\therefore L_{mo} = 44$

تقابل اكبر تكرار (27)

$\Delta_1 = 27 - 13 = 14$

$\Delta_i^2 = 27 - 12 = 15$

$w = 51 - 44$

$w = 7$

صيغة المنوال:

$$MO = L_{mo} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] \times w$$
$$MO = 44 + \left[\frac{14}{14+15}\right] \times (7)$$
$$MO = 47.38$$

RABAAIUN
رابعيون
@TTTT_MO

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي:

1) المنوال للأعداد 42 , 40 , 44 , 41 هو:

(a) 44 (b) 40 (c) 41 (d) لايوجد

2) المنوال من قيم الجدول التكراري الآتي :

| الفئة | 30-38 | 39-47 | 48-56 | 57-65 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 4 | 5 | 2 |

(a) 30 (b) 40 (c) 50 (d) 60

3) $\Delta_1$ تساوي :

a) تكرار الفئة المنوالية b) تكرار الفئة المنوالية ـ تكرار الفئة التي بعدها

c) تكرار الفئة المنوالية ـ تكرار الفئة التي قبلها d) تكرار الفئة المنوالية +تكرار الفئة التي قبلها

## التمرينات

4) احسب المنوال للتوزيع التكراري الآتي :

| الفئة | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 10 | 28 | 19 | 4 | 6 | 3 |

5) احسب المنوال للتوزيع التكراري الآتي :

| الفئة | 51-55 | 56-60 | 61-65 | 66-70 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 7 | 8 | 4 |

## مسائلُ حياتيةٌ

6) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الاميال المقطوعة (بالمئات) خلال اسبوع واحد لعينة مؤلفة من 20 سائق شاحنة يعملون لصالح وزارة التجارة العراقية. احسبوالمنوال لعدد الاميال المقطوعة.

| الفئة | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 20 |

7) التوزيع التكراري التالي يمثل عدد الطلبات الواصلة كل يوم خلال الأربعة وخمسين يوما الماضية لمكتب احدى الشركات. احسب المنوال.

| عدد الطلبات | 10-12 | 13-15 | 16-18 | 19-21 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f | 6 | 13 | 20 | 15 | n=54 |

# الدرسُ [5-4]

## مقاييس التشتت

## Measures of Dispersion

**فكرة الدرس**

* احتساب المدى والتباين والانحراف المعياري لبيانات مبوبة وغير مبوبة

**المفردات**

* المدى
* التباين
* الانحراف المعياري

**تعلم**



كي تعرف تقارب درجاتك في مادة الرياضيات مع درجات زملائك في الصف، عليك ان تحدد قيمة رقمية لتجانس كل الدرجات.
كيف يمكنك فعل هذا؟

إضافة الى مقاييس النزعة المركزية، من الضروري ان تكون لدينا قيم رقمية لكي تصف التجانس ومن ثمَّ الانتشار أو التشتت لمجموعة بيانات.
ان المقاييس التي تصف الانتشار في مجموعة بيانات تسمى **بمقاييس التشتت**.

## [5-4-1] المدى The Range

**في البيانات غير المبوبة،**
المدى = أعلى قيمة - أصغر قيمة .

**مثال (1)** جد المدى من البيانات التالية:

5 ، 10 ، 8 ، 9 ، 7 ، 4

المدى = أعلى قيمة - أصغر قيمة .

المدى $Ra = 10 - 4 = 6$

البيانات المبوبة :
المدى = الحد الأعلى لأخر فئة - الحد الأدنى لاول فئة

**مثال (2)** الجدول التالي يمثل اعمار 54 طالباً لآخر سنة :

| الفئة | 6-8 | 9-11 | 12-14 | 15-17 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 12 | 17 | 15 | 10 |

الحد الأعلى للفئة الاخيرة 17
الحد الادنى للفئة الاولى 6

$Ra = 17 - 6$
المدى $Ra = 11$

رابعيون
@TTTT_MO

## [5-4-2] التباين والانحراف المعياري The Variance and Standard Deviation

إن **تباين العينة** ($\sigma^2$) لمجموعة بيانات غير مبوبة يقيس انتشار البيانات حول وسط مجموعة البيانات تلك.

$\sigma^2$ ويمكن احتسابه بالشكل،

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}( x_i - \overline{x} )^2}{n-1}$$

حيث $n = \sum_{m}^{k} f_m$ هو مجموع التكرارات

حيث أن $x_1, x_2, \square, x_n$ تمثل قيم العينة وإن $\overline{x}$ تمثل متوسط العينة وإن $n$ تمثل حجم العينة.

إن الجذر التربيعي لتباين العينة يسمى **بالانحراف المعياري للعينة** ($\sigma$) والانحراف المعياري للعينة يقاس بنفس وحدات المتغير الأصلي.

إن خطوات احتساب تباين العينة والانحراف المعياري للعينة للبيانات غير المبوبة هي كما في جدول الإجراءات

**جدول الاجراءات:** إيجاد تباين العينة والانحراف المعياري للعينة في حالة البيانات غير المبوبة.

**الخطوة 1:** ايجاد الوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ ووضعه في العمود B:

عمل جدول على النحو التالي :

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| x | $\overline{x}$ | $x_1 - \overline{x}$ | $(x_1 - \overline{x})^2$ | $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ |

**الخطوة 2:** إيجاد انحراف كل قيمة من قيم البيانات عن الوسط الحسابي للعينة $(x_i - \overline{x})$. ووضعها في العمود C.

**الخطوة 3:** تربيع الانحرافات $(x_i - \overline{x})^2$ . ووضعها في العمود D .

**الخطوة 4:** إيجاد مجموع المربعات $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ . ووضعها في العمود E .

**الخطوة 5:** إيجاد تباين العينة وفق الصيغة الآتية : $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}( x_i - \overline{x} )^2}{n-1}$ .

الخطوة 6: أخذ جذر تباين العينة للحصول على الانحراف المعياري للعينة $\sigma$ .

**مثال (3)** للبيانات غير المبوبة التالية (9, 8, 3, 6, 2,8). جد تباين العينة والانحراف المعياري للعينة.

الوسط الحسابي هو $\bar{x} = \frac{9+8+3+6+2+8}{6} = \frac{36}{6} = 6$

الجدول ادناه يتضمن تطبيق الخطوات الواردة في جدول الاجراءات :

| A $x_i$ | B $\bar{x}$ | C $x_i - \bar{x}$ | D $(x_i - \bar{x})^2$ | E $\sum (x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 3 | 9 | |
| 8 | 6 | 2 | 4 | |
| 3 | 6 | -3 | 9 | |
| 6 | 6 | 0 | 0 | |
| 2 | 6 | -4 | 16 | |
| 8 | 6 | 2 | 4 | |
| | | | | 42 |

وبذلك يكون تباين العينة هو: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{42}{6-1} = 8.4$

والانحراف المعياري للعينة هو: $\sigma = \sqrt{8.4} = 2.9$

إن أسلوب إيجاد تباين العينة والانحراف المعياري للعينة في حالة البيانات المبوبة هو مشابه لاسلوب ايجاد متوسط العينة للبيانات المبوبة، وانه يتم استخدام نقطة المنتصف $x_m$ لكل فئة. ان خطوات احتساب تباين العينة والانحراف المعياري للعينة للبيانات المبوبة هي كما في جدول الاجراءات التالي،

**جدول الإجراءات:** إيجاد تباين العينة والانحراف المعياري للعينة في حالة البيانات المبوبة.

عمل جدول على النحو الآتي:

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الفئة | $f_m$ | المنتصف $x_m$ | $\bar{x}$ | $x_m - \bar{x}$ | $(x_m - \bar{x})^2$ | $\sum f_m (x_m - \bar{x})^2$ |

الخطوة 1: إيجاد نقطة المنتصف $x_m$ وتوضع في العمود C .

الخطوة 2: إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum f_m x_m}{n}$ توضع في العمود D.

الخطوة 3: إيجاد انحراف كل نقطة منتصف فئة عن متوسط العينة $x_m - \bar{x}$. توضع في العمود E .

الخطوة 4: احتساب مربع القيم المحتسبة في الخطوة السابقة $(x_m - \bar{x})^2$. توضع في العمود F .

الخطوة 5: احتساب مجموع القيم المحتسبة في الخطوة السابقة $\sum f_m (x_m - \bar{x})^2$ .

الخطوة 6: احتساب التباين .( احتساب مجموع القيم في G مقسوم على (n-1))

الخطوة 7: أخذ الجذر التربيعي لتباين العينة للحصول على الانحراف المعياري للعينة.

**مثال (4)** يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 30 تلميذاً، احسب التباين والانحراف المعياري لدرجات هؤلاء التلاميذ.

نعمل الجدول التالي :

| الفئة | 3-5 | 6-8 | 9-11 | 12-14 | 15-17 | 18-20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 1 | 3 | 6 | 10 | 8 | 2 |

| الفئة | $f_m$ | $x_m$ | $\sum f_m x_m$ | $\bar{x}$ | $x_m - \bar{x}$ | $(x_m - \bar{x})^2$ | $f_m(x_m - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3-5 | 1 | 4 | 4 | $\bar{x} = \frac{\sum f_m x_m}{n}$ | -8.7 | 75.69 | 75.69 |
| 6-8 | 3 | 7 | 21 | | -5.7 | 32.49 | 97.47 |
| 9-11 | 6 | 10 | 60 | $\bar{x} = \frac{381}{30}$ | -2.7 | 7.29 | 43.74 |
| 12-14 | 10 | 13 | 130 | | 0.3 | 0.09 | 0.9 |
| 15-17 | 8 | 16 | 128 | $\bar{x} = 12.7$ | 3.3 | 10.89 | 87.12 |
| 18-20 | 2 | 19 | 38 | | 6.3 | 39.69 | 79.38 |
| | 30 | | 381 | | | | 384.3 |

فيكون تباين العينة عبارة عن :

$$\sigma^2 = \frac{384.3}{30-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{384.3}{29} \approx 12.01$$

والانحراف المعياري للعينة

$$\sigma \approx \sqrt{12.01} \approx 3.466$$

**مثال (5)** جدول التوزيع التكراري التالي يمثل عدد حالات طلب الاسعاف الفوري في كل يوم من 28 يوما في بغداد. جد تباين العينة والانحراف المعياري للعينة.

| الفئة | 10-15 | 16-21 | 22-27 | 28-33 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 12 | 9 | 5 | 2 |

نعمل الجدول الآتي :

| الفئة | التكرار f | نقطة المنتصف $x_m$ | $f_m x_m$ | $x_m - \bar{x}$ | $f_m(x_m - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10-15 | 12 | 12.5 | 150 | -5.357 | 344.3694 |
| 16-21 | 9 | 18.5 | 166.5 | 0.643 | 3.721041 |
| 22-27 | 5 | 24.5 | 122.5 | 6.643 | 220.6472 |
| 28-33 | 2 | 30.5 | 61 | 12.643 | 319.6909 |
| المجموع | 28 | | 500 | | 888.429 |

1. نستخرج الوسط الحسابي بالشكل،

$$\bar{x} = \frac{\sum_{m=1}^{4} f_m x_m}{n} = \frac{500}{28} \approx 17.857$$

2. فيكون تباين العينة عبارة عن

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{m=1}^{4} f_m (x_m - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{888.429}{28-1} \approx 32.905$$

والانحراف المعياري للعينة $\sigma = \sqrt{32.905} \approx 5.736$

## الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍّ مما يأتي:

1) تباين البيانات التالية (10, 12, 23, 23, 16, 23, 21, 16) هو:

(a) 20 (b) 25 (c) 24 (d) كل من c و b و a غير صحيحة

2) الانحراف المعياري للبيانات التالية (1, 2, 3, 8, 6, 9, 6) هو:

(a) 1.4 (b) 3.055 (c) 3.5 (d) كل من c و b و a غير صحيحة

## التمرينات

3) لجدول التكرارات الآتي، جد الوسط الحسابي والانحراف المعياري

| الفئة | 81-90 | 91-100 | 101-110 | 111-120 | 121-130 |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 10 | 25 | 12 | 6 | 5 |

4) لجدول التكرارات الآتي ، جد المدى والتباين

| الفئة | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 5 | 9 | 3 |

## مسائلُ حياتيةُ

5) البيانات التالية تمثل الاجور اليومية لأحد عشر عاملا في معمل فتاح باشا للأقمشة في مدينة الكاظمية في بغداد. جد المدى والانحراف المعياري (5, 6, 6.5, 7, 8, 4.5, 7.5, 9, 9.5, 10, 5).

6) بيانات أعمار المدرسين العاملين في مدارس إحدى المدن قد كانت كما في الجدول التالي. احسب المدى والتباين والانحراف المعياري.

| الأعمار بالسنوات | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 | 50-54 | 55-59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد المدرسين | 23 | 112 | 70 | 116 | 96 | 88 | 45 | 29 |

# اختبار الفصل

Chapter Test

1 جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التكراري التالي والتي تمثل أعمار 30 مريضاً زاروا طبيب العيون .

| الفئة العمرية | 12-20 | 21-29 | 30-38 | 39-47 | 48-56 | 57-65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 4 | 2 | 3 | 7 | 9 | 5 |

2 الجدول التالي يمثل درجات 30 تلميذاً .

| الدرجات | 3-5 | 6-8 | 9-11 | 12-14 | 15-17 | 18-20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 1 | 3 | 6 | 10 | 8 | 2 |

جد المدى لدرجات التلاميذ الموضحة في الجدول .

3 الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لوزن 30 طفلاً لأقرب كيلوغرام .

| الوزن | 2-4 | 5-7 | 8-10 | 11-13 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 8 | 12 | 5 |

جد

أ ) المدى

ب ) التباين

جـ ) الانحراف المعياري

RABAAIUN
رابعيون
@TTTT_MO

| | | |
|---|---|---|
| $A \subseteq B = \{x: \in A \Rightarrow x \in B\}$ | Subset | المجموعة الجزئية $A \subseteq B$ |
| $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ | Absolute value $\lvert x \rvert$ | القيمة المطلقة $\lvert x \rvert$ |
| $f(x) = c \quad , c \in R$ | Constant function | الدالة الثابتة |
| $f(x) = x$ | Identity function | الدالة المحايدة |
| $f(x) = \sqrt{x} \quad , x \geq 0$ | Square root function | دالة الجذر التربيعي |
| $f(x) = \frac{1}{x} \quad , x \neq 0$ | Reciprocal function | الدالة المقلوبة ( النسبية ) |
| $f(x) = [[x]]$<br>$n \leq x < n+1 \quad , n \in Z \ , x \in R$ | Step function | الدالة الدرجية |
| $f(x) = ax^2 + bx^2 + c, a \neq 0$ | Quadratic function | الدالة التربيعية |
| $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ | Cubic function | الدالة التكعيبية |
| $\vec{A} = (x, y)$ | Vector $\vec{A}$ | المتجه |
| $\lVert \vec{A} \rVert = \sqrt{x^2 + y^2}$ | Length of the vector | طول المتجه المقيد |
| $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \ 0 \leq \theta < 2\pi$ | Direction of the Vecter : $\theta$ | اتجاه المتجه : $\theta$ |
| $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, m = \tan\theta, m = \frac{-a}{b}$ | Slop of the line | ميل المستقيم |
| $y - y_1 = m(x - x_1), ax + by + c = 0$<br>$y = mx + k$ | Formulas of the Equation line | صيغ معادلة المستقيم |
| $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$ | Parallel lines | المستقيمات المتوازية |
| $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ | Perpendicular lines | المستقيمات المتعامدة |
| $(\cos\theta, \sin\theta)$ | Triangle point | النقطة المثلثية |
| $a < x < b$ | Open interval (a,b) | الفترة المفتوحة (a,b) |
| $a \leq x \leq b$ | Close interval [a,b] | الفترة المغلقة [a,b] |
| $a < x \leq b$<br>$a \leq x < b$ | Half – open interval<br>Half –closed interval | الفترة نصف مفتوحة (نصف مغلقة)<br>[a,b),(a,b] |
| $a < b$ | a Less than b | a أقل من b |
| $a \leq b$ | a Less than or Equal b | a أقل أو يساوي b |
| $a > b$ | a Grater than b | a أكبر من b |

| | | |
|---|---|---|
| $a \geq b$ | a Grater than or Equal b | a أكبر أو يساوي b |
| $A \cap B = \{x: \in A \text{ and } x \in B\}$ | Intersection | التقاطع $\cap$ |
| $A \cup B = \{x: \in A \text{ or } x \in B\}$ | Union | الاتحاد $\cup$ |
| $A - B = \{x: \in A \text{ and } x \notin B\}$ | Difference : A - B | مجموعة الفرق |
| $U = A \cup A^c$ | Universal set | المجموعة الشاملة U |
| $A^c \setminus A \qquad A^c = \{\cup - A\}$ | Complement : $A^c$ | المجموعة المتممة للمجموعة |
| $\{\}, \varnothing$ | Empty set (null set) | المجموعة الخالية $\varnothing$ |
| $M(x,y) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ | The mid-point | نقطة المنتصف |
| $(x,y) = (\frac{mx_1+nx_2}{m+n}, \frac{my_1+ny_2}{m+n})$ | Directing a segment internally | تقسيم قطعة المستقيم من الداخل |
| $(x,y) = (\frac{mx_1-nx_2}{m-n}, \frac{my_1-ny_2}{m-n})$ | Dividing a segment externally | تقسيم قطعة المستقيم من الخارج |
| $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ | Distance between two point | المسافة بين النقطتين |
| $d = \frac{\lvert ax_1 + y_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | Distance between a point and a line | البعد بين المستقيم $ax + by + c = 0$ والنقطة $(x_1,y_1)$ |
| $d = \frac{\lvert c_2 - c_1 \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | Distance between two parallel lines | البعد بين المستقيمين $ax + by + c_1 = 0$ المتوازيين $ax + by + c_2 = 0$ |
| $\bar{x} = \frac{\sum f_m}{n}$ | Arithmetic mean | الوسط الحسابي |
| $ME = L_{me} + \left[\frac{\frac{\sum f_m}{2} - F}{f_m}\right](w)$ | The median | الوسيط |
| $Mo = L_{mo} + [\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}](w)$ | The mode | المنوال |
| Ra = أعلى قيمة - أصغر قيمة | The range | المدى |
| $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ | The variance | التباين |
| $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ | Standard deviation | الانحراف المعياري |

@TTTT_MO

| | | |
|---|---|---|
| $\infty$ | Infinity | المالانهاية $\infty$ |
| $N = \{ 1,2 ,3, .... \}$ | Natural numbers :N | الاعداد الطبيعية N |
| $W = \{ 0,1,2 ,3, .... \}$ | Whole numbers : W | لاعداد الكلية W |
| $Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2 ,3, .... \}$ | Integer numbers : Z | الاعداد الصحيحة Z |
| $Q = \{ \frac{a}{b}, a , b \in Z , b \neq 0 \}$ | Rational numbers : Q | الاعداد النسبية Q |
| اذا كانت الصورة العشرية للعدد غير منتهية وليست دورية فهي تمثل عدداً غير نسبي | irreal number | الاعداد الغير النسبية $Q^{'}$ |
| $R = Q \cup Q^{'}$ ,<br>$Q^{'}$ irrational number | Real number : R | الاعداد الحقيقية R |
| $D_f = \{ x : x \in R \}$ | Domain : D | المجال للدالة (مجموعة القيم التي يأخذها المتغيير x) |
| $R_f = \{ y : y \in R \}$ | Co-domain | المجال المقابل(مجموعة القيم التي يأخذها المتغيير y) |
| $a \in A$ | Belong to | انتماء عنصر الى مجموعة |
| $b \notin A$ | Not belong to | عدم انتماء عنصر الى مجموعة |
| $-\infty$ 0 $\infty$ | Number line | مستقيم الاعداد |
| $\forall$ | For all | لكل |
| القياس بالدرجات مثلا $32^{\circ}$ | Degree measure | القياس الستيني $D^{\circ}$ |
| $\frac{Q}{D^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}}$ | Radian measure | القياس الدائري Q |
| لكل مصفوفة مربعة A محددها هو $\| A \|$ | Determinants | المحددات |
| $\sin \theta$ , $\cos \theta$ , $\tan \theta$ , $\cot \theta$ , $\sec \theta$ , $\csc \theta$ | Trigonometric ratios | النسب المثلثية |

# المحتويات


المقدمة ..... 3

## الفصل الاول الدوال الحقيقية والمتباينات

الاختبار القبلي ..... 5

الدرس1:الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية ..... 6

الدرس2: المتباينات ..... 10

الدرس3 : الدوال الحقيقية (الرئيسة الام) ..... 15

الدرس4: الدالة التربيعية والدالة التكعيبية..... 21

الدرس5: دالة القيمة المطلقة ..... 26

اختبار الفصل ..... 31

## الفصل الثاني المثلثات

الاختبار القبلي ..... 33

الدرس1: القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا ..... 34

الدرس2: الدوال المثلثية ..... 38

الدرس3: حل المثلث القائم الزاوية ..... 45

الدرس4: مساحة المثلث والقطاع الدائري والقطعة الدائرية ..... 49

الدرس5: المتطابقات المثلثية..... ..... ..... 55

اختبار الفصل ..... 59

## الفصل الثالث المصفوفات

الاختبار القبلي ..... 61

الدرس1: خصائص المصفوفاتُ وأنواعُها ..... 62

الدرس2: العملياتُ على المصفوفاتِ ..... 66

# المحتويات


الدرس3: ضربُ المصفوفاتِ ..... 71

الدرس4: محدداتُ المصفوفاتِ المربعةِ (2×2)، (3×3) ..... 75

الدرس5: حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر ..... 79

اختبار الفصل ..... 83


## الفصل الرابع المتجهات والهندسة الأحداثية


الاختبار القبلي ..... 85

الدرس1: مفهوم المتجه ..... 86

الدرس2: العمليات على المتجهات ..... 91

الدرس3: المستقيمات المتوازية والمتعامدة ..... 97

الدرس4: الميل المستقيم ومعادلة المستقيم ..... 100

الدرس5: تقسيم قطعة المستقيم ..... 104

الدرس6: المسافة بين نقطتين ..... 109

اختبار الفصل ..... 113


## الفصل الخامس الأحصاء


الاختبار القبلي ..... 115

الدرس1: مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي) ..... 116

الدرس2: مقاييس النزعة المركزية (الوسيط) ..... 119

الدرس3: مقاييس النزعة المركزية (المنوال) ..... 123

الدرس4: مقاييس التشتت ..... 126

اختبار الفصل ..... 131

الصيغ العلمية والرموز ..... 132

المحتويات ..... 135



@TTTT_MO