الفصل الثالث/ النسبة والتناسب

سبق لك أن تعلمت عندما نكون كسراً من اجل مقارنة عددين أو كميتين من النوع نفسه لهما الوحدة ذاتها الكسر (نسبة) ونسمي البسط) مقدم النسبة) ونسمي مقام الكسر (تالي النسبة نسمي سي مقدم النسبة وتاليها (حدي النسبة) ونسي أن النسبة بين العدد a والعدد 6 تكتب بالصيغة الأتية

$\frac{a}{b}$ او a, b , $b \neq 0$

وتقرأ نسبة a الى b

مثال(1) : إذا كانت عدد معلمي إعدادية صناعية 25 وكان مجموع التلاميذ فيها 350 فما نسبة عدد المعلمين إلى عدد الطلاب؟

نسبة عدد المعلمين إلى عدد الطلاب = $\frac{25}{350}$ او 25:350

وبالتبسيط =$\frac{1}{14}$ أو 1:14

مثال (2): في خليط الخرسانة إذا قلنا إن نسبة وزن الماء إلى وزن الإسمنت يجب ان تكون $\frac{1}{4}$

فهذا معناه ان وزن الإسمنت المستخدم يجب أن يساوي 4 أضعاف وزن الماء.

التناسب هو تساوي كميتين نسبيتين أو أكثر فمثلاً $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ يمكن كتابته بالصيغة $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ وتسمى a, b, c, d حدود التناسب،ونسمي a, d طرفي التناسب كما نسمي العددين c،b وسطي التناسب

خواص التناسب Proportion properties

1) خاصية الضرب التبادلي

حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow .d$

2) خاصية ابدال الطرفين $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

3) خاصية إبدال الوسطين $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

4)خاصية قلب التناسب $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

5) خاصية التركيب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

6) خاصية التحليل $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

7)خاصية التحليل والتركيب معاً $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

8) مجموع المقدمات إلى مجموع التوالي يساوي أحد النسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\quad or\quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

9) اذا تساوت المقدمات تساوت التوالي و العكس صحيح

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\ (a=c)\Leftrightarrow(b=d)$$

ملاحظات مهمة :1)هل تشكل النسبتان تناسباً ام لا نستخدم خاصية الضرب التبادلي

(حاصل ضرب الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفين) أي :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\ a.d=b.c$$

مثال (3): هل تشكل النسبتان الأتيتان تناسباً صحيحا أو لا ؟ $\frac{3}{7},\frac{12}{28}$

حاصل ضرب الوسطين $=3\times28=84$

حاصل ضرب الطرفين $12\times7=84$

اذن النسبتان تشكلان تناسباً صحيحاً.

2)اذا ضربنا حدي النسبة بكمية ثابتة فان النسبة لا تتغير.

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}\forall k\in R,k\neq 0$$

3)اذا قسمنا حدي النسبة على كمية ثابتة فان النسبة لا تتغير.

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}\forall k\in R,k\neq 0$$

4) اذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ بحيث $a\neq c$ ، $b\neq d$ فان: $k\in R^{+}$, $b=kd$, $a=kc$

توضيح ان التناسب الاتي $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

لا يعني بالضرورة أن $a=2,b=3$ إذ يمكن ان يعني $a=4$, $b=6$ أو $a=16$, $b=24$ لأن:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{16}{24}=\cdots$$

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{2\times 8}{3\times 8}=\cdots$$

لاحظ انه يمكننا ان نعمم ذلك بالقول أن $a=2k$, $b=3k$ حيث k ثابت يسمى ثابت التناسب.

(5) إذا أضيف أو طرح من حدي النسبة نفس العدد فإن قيمة النسبة تتغير.

فمثلا النسبة 4 : 3 إذا أضيف إلى حديها العدد 2 فان النسبة تصبح 6 : 5 وهما غير متساويتين في القيمة لان:

حاصل ضرب الوسطين = 6 × 3 = 18 و حاصل ضرب الطرفين = 4 × 5 = 20

أي ان : $\frac{3}{4}\neq\frac{5}{6}$

مثال (4): جد قيمة $\frac{3a+2b}{6b-a}$ اذا علمت ان $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

وفقاً للملاحظة الواردة أعلاه يكون $a=2k\ ,\ b=3k$ حيث k يمثل ثابت التناسب

$$\frac{3a+2b}{6b-a}=\frac{3(2k)+2(3k)}{6(3k)-(2k)}$$

$$=\frac{6k+6k}{18k-2k}=\frac{12k}{16k}=\frac{3}{4}$$

مثال (5): إذا كان $4x^2+y^2=4xy$ فأوجد $x:y$

بترتيب المعادلة ومساواتها للصفر ينتج $4x^2-4xy+y^2=0$

نلاحظ ان المقدار $4x^2-4xy+y^2$ هو مربع كامل ويمكن تحليله الى الصيغة $(2x-y)^2$

$$(2x-y)^2=0$$

وبجذر الطرفين نحصل على $2x-y=0$ اي :

$$2x=y$$

وبقسمة الطرفين على 2 نتوصل الى أن:

$$\frac{2x}{2y}=\frac{y}{2y}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

$$x:y=1:2$$

مثال(6) :ما هو اماهو العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه ألي حدي النسبة 10 : 3 يكون الناتج هو 2 : 1

نفرض أن العدد هو x ويكون مربعه هو x^2 وهذا يعني ان: $\frac{3+x^2}{10+x^2}=\frac{1}{2}$

وباستخدام خاصية الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) يكون

$$10+x^2=6+2x^2$$

$$10-6=2x^2-x^2+x^2=4$$

وبجذر الطرفين ينتج $x=\pm2$ ولما كان العدد موجب فان $(x=2)$ أي ان العدد المطلوب هو2وللتأكد من الحل

$$\frac{3+x^2}{10+x^2}=\frac{3+2^2}{10+2^2}=\frac{3+4}{10+4}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

مثال (7):إذا كانت a , b , c , d كميات متناسبة فأثبت أن

$$\frac{2a-3c}{4a+5c}=\frac{2b-3d}{4b+5d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{2a}{2b}=\frac{-3c}{-3d}$$

(إذا ضربنا حدي النسبة بكمية ثابتة فان النسبة لا تتغير)

$$\frac{2a-3c}{2b-3d}=\frac{a}{b}\dots(1$$

(مجموع المقدمات إلى مجموع التوالي يساوي أحد النسب) وبنفس الطريقة:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{4a}{4b}=5c\rightarrow\frac{4a+5c}{4b+5d}=\frac{a}{b}\dots(2$$

من(1) و (2) نحصل على

$$\frac{2a-3c}{2b-3d}=\frac{4a+5c}{4b+5d}$$

وبأبدال الوسطين نحصل على:

$$\frac{2a-3c}{4a+5c}=\frac{2b-3d}{4b+5d}$$

التناسب المتسلسل:

اذا كان $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$

يقال إن a, b, c في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي) وبالعكس إذا كان في تسلسل متناسب فان:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$$

ويسمى الوسط المتناسب أو الوسط الهندسي للعددين a, c كما يسمى a, c طرفي التناسب.

مثال (8): هل تشكل الأعداد 3,9,27 تناسباً متسلسلاً صحيحا او لا؟

التناسب المتسلسل بين الأعداد الثلاثة يجعل

$a = 3$,$b = 9$,$c = 27$ وبالصيغة الأتية:

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

وهي عبارة صائبة منطقيا لان $b^2 = ac$ حيث :

$$b^2 = 9^2 = 81 \qquad ac = 3 \times 27 = 81$$

مثال (9): جد الوسط المتناسب للعددين 2,8

نفرض ان x هو الوسط المتناسب للعددين فنحصل على تناسب متسلسل هو $2, x, 8$ أي:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \iff x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

التناسب المتسلسل لأربعة أعداد

لتكن $a, b, c, d \in R^+$ اعداداً في تناسب متسلسل أي $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

فان تطبيق خاصية الضرب التبادلي تعطينا العلاقات الأتية:

$$a = dk^3, b = dk^2, c = dk$$

مثال (10): إذا كان x, l, f, g أربعة اعداد في تناسب متسلسل اثبت ان

$$\frac{x + l + f}{l + f + g} = \frac{x}{l}$$

حيث ان x, l, f, g أربعة أعداد في تناسب متسلسل فان:

$$\frac{x}{l} = \frac{l}{f} = \frac{f}{g} = k$$

وبتطبيق العلاقات الواردة بالتعريف أعلاه نتوصل إلى:

$$x = gk^3 , l = gk^2 , f = gk$$

$$l.h.s = \frac{x + l + f}{l + f + g}$$

$$= \frac{gk^3 + gk^2 + gk}{gk^2 + gk + g}$$

$$= \frac{gk}{g} = k = \frac{x}{l} = r.h.s$$

مثال(11) / بين ان الأعداد 625,125,25,5 تنتظم في تناسب متسلسل.

نفرض $a = 625$, $b = 125$, $c = 25$, $d = 5$

$$\frac{a}{b} = \frac{625}{125} = 5 \qquad \frac{b}{c} = \frac{125}{25} = 5 \qquad \frac{c}{d} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 5 = k$$

أي ان الاعداد تنتظم في تناسب متسلسل.

تمارين (3-1)

(1) جد العدد الذي اذا طرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{49}{69}$ فأنها تصبح $\frac{2}{3}$

نفرض العدد هو x ونفرض ان ثلاثة امثاله هي 3x

$$\frac{49 - 3x}{69 - 3x} = \frac{2}{3}$$
$$3(49 - 3x) = 2(69 - 3x)$$
$$147 - 9x = 138 - 6x$$
$$-9x + 6x = 138 - 147$$
$$-3x = -9$$
$$x = 3$$

العدد هو3

(2) بين فيما إذا كانت أزواج النسب الأتية تمثل تناسباً ام لا؟

$a) \left(\frac{19}{76}, \frac{5}{20}\right)$

$5 \times 76 = 19 \times 20$

$380 = 380$ تمثل تناسب

$b) \left(\frac{17}{34}, \frac{2}{3}\right)$

$2 \times 34 = 17 \times 3$

$68 \neq 51$ لاتمثل تناسب

$c)\ \left(\frac{5}{9},\frac{15}{27}\right)$

$15 \times 9 = 5 \times 27$

$135 = 135$ تمثل تناسب

$d)\ \left(\frac{6}{10},\frac{24}{42}\right)$

$24 \times 10 = 6 \times 42$

$240 \neq 252$ لاتمثل تناسب

(3) جد العدد الذي لو أضيف إلى الأعداد 21,5,27 أصبحت متناسبة.

نفرض العدد هو x

$$\frac{1+x}{5+x} = \frac{2+x}{7+x}$$

$$(2+x)(5+x) = (1+x)(7+x)$$

$$10 + 2x + 5x + x^2 = 7 + x + 7x + x^2$$

$$10 + 7x + x^2 = 7 + 8x + x^2$$

$$10 - 7 = 8x - 7x$$

$$x = 3$$

(4) جد قيمة x في التناسبين الآتيين:

$a)\ \frac{x+7}{7} = \frac{13}{5}$

$7 \times 13 = 5(x+7)$

$91 = 5x + 35$

$5x = 91 - 35$

$5x = 56$

$x = \frac{56}{5}$

الأستاذ سامح البنداري

$b)(5x-1):(x+4)=4:5$

$$\frac{(5x-1)}{(x+4)}=\frac{4}{5}$$

$$4(x+4)=5(5x-1)$$

$$4x+16=25x-5$$

$$16+5=25x-4x$$

$$21x=21$$

$$x=1$$

(5) اثبت ان m,n,y,x متناسبة إذا علمت ان:

$$\frac{x-2n}{y-2m}=\frac{3x+2n}{3y+2m}$$

الطرف الايمن $\frac{3x+2n}{3y+2m}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2n}{2m}$

الطرف الايسر $\frac{x-2n}{y-2m}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{-2n}{-2m}=\frac{2n}{2m}$

(6) اذا كان $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ جد قيمة التناسب :

$$\frac{3a+2b}{6b-a}$$

$$a=2k \quad , \quad b=3k$$

$$\frac{3(2k)+2(3k)}{6(3k)-2k}=\frac{6k+6k}{18k-2k}$$

$$=\frac{12k}{16k}=\frac{3}{4}$$

(7) أكمل الجمل الرياضية الأتية بما يناسبها لتك=ون جملاً صائبة منطقياً:

a) إذا كانت $3, 6, x+15$ كميات متناسبة فان x تساوي .....

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{x+15}$$
$$3x + 45 = 36$$
$$3x = 36 - 45$$
$$3x = -9$$
$$x = -3$$

b) إذا كانت $a, b, 2, 3$ كميات متناسبة فان $\frac{a}{b}$ تساوي $\frac{2}{3}$

c) النسبة تعتبر عملية رياضية بينما يعتبر التناسب معادلة رياضية.

d) اذا كان $5a = 4b$ فان $\frac{a}{b}$ يساوي $\frac{5}{4}$

e) الوسط الهندسي بين العددين $27, \frac{1}{3}$ هو .....

$$\frac{27}{x} = \frac{x}{\frac{1}{3}}$$
$$x^2 = 27 \times \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm 3$$

التغير (Variation)

التغير ظاهرة طبيعية في الحياة نشاهدها في العديد من المواقف والأشياء فمثلاً:

- درجات الحرارة تتغير بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- تتغير استجابة المريض للدواء تبعا لعدد الجرعات.
- تغير الطلب على المنتجات النفطية للناس في الشتاء عن الصيف.
- تغير المستوى العلمي للطالب بتغير المناهج وطرائق التدريس.
- تغير فصول السنة حسب دوران الأرض حول الشمس.
- عند القيام بأنشطة رياضية فان الشخص يفقد سعرات حرارية تبعا لوزنه.
- بتغير عمق الآبار النفطية تتغير درجة الحرارة والضغط.

وغير ذلك الكثير فالتغير أو التناسب هو سر من أسرار الجمال فالوجه يكون جميلا عندما يكون ناك تناسب متزن بين أطوال أجزائه. والسيارة تكون جميلة إذا كانت أطوالها متناسبة بشكل يريح الناظر، وقطع الأثاث والأدوات الصغيرة وكل ما يحيط بنا سوف يغدو جميلا في حال كانت أطواله

التغير الطردي (Direct Variation)

يقال أن الكمية x تتغير طردياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x, y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغير في قيمة x بالنسبة ذاتها.

- يسمى المتغير y بالمتغير المستقل، أما المتغير x فيسمى المتغير التابع.
- يرمز لعملية التغير بالرمز $(\propto)$
- يعبر عن العبارة (x تتغير طردياً تبعاً لتغير y) بالرموز الرياضية كما يلي :-

$$x \propto y = x \to k.y$$

حيث k عدد ثابت ينتمي الى R^+ (مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) ويسمى ثابت التغير (أو ثابت التناسب)

- إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y فإن: -

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \text{او} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

مثال (12):إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان y = 9 عندما x = 3 جد قيمة ثابت التغير.

$$x \propto y \to x = k.y$$

$$3 = k.(9)$$

$$k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال (13) : إذا كانت x تتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان y = 28 عندما x = 7 جد قيمة x عندما y = 60 .

الطريقة الأولى : $x \propto y \to x = k.y$.

$$7 = k.(28)$$

$$k = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}.y \to x = \frac{1}{4} \times (60) \to x = 15$$

الطريقة الثانية :

$$x \propto y \to \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{7}{x_2} = \frac{28}{60} \to \frac{7}{x_2} = \frac{7}{15} \to x_2 = 15$$

مثال (14): ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما، فإذا ما، أخذت x القيمتين (5,1.6) وكانت قيمتا y المناظرتين لهما هي 4.8, على الترتيب. بين نوع العلاقة بين x, y .

$x_1 = 5 \qquad x_2 = 1.6 \qquad y_1 = 15 \qquad y_2 = 4.8$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية: -

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{1.6} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{15}{4.8} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$

$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \quad x \propto y$

ملاحظة: يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية -

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1.6}{4.8} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

العلاقة هي علاقة تغير طردي.

مثال(15) :. إذا كان $x \propto y$ أثبت أن $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$

بما أن $x \propto y \rightarrow x = k.y$

لأجل أثبات $(x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$ علينا أن نبرهن أن

$(x^3 + 2xy^2) = k.(x^2y)$

$\frac{x^3+2xy^2}{x^2y} = L$

اي ان عدد ثابت L ؛

بتعويض $x = k.y$

$\frac{x^3+2xy^2}{x^2y} = \frac{(k.y)^3+2(k.y).y^2}{(k.y)^2.y}$

$= \frac{k^3y^3 + 2ky^3}{k^2y^3} = \left(\frac{y^3(k^3+2k)}{y^3k^2}\right)$

$= \frac{k^3+2k}{k^2} = L$

حيث أن كون عدداً ثابتاً يقتضي أن يكون المقدار L عدداً ثابتاً أيضاً.

$\therefore (x^3 + 2xy^2) \propto (x^2y)$

مثال (16) :. تحتاج رافعة لرفع جسم وزنه 12 نيوتن إلى قوة مقدارها 0.275 نيوتن أوجد مقدار القوة اللازم استخدامها في هذه الرافعة لرفع جسم اخر وزنه 45 نيوتن إذاعلمت ان القوة التي نستخدمها لرفع الجسم تتغير طردي مع وزنه.

لنرمز للقوة بالرمز F ووزن الجسم بالرمز W



$$F \propto W \rightarrow \frac{f_1}{w_1} = \frac{f_2}{w_2}$$

$$\frac{f_1}{45} = \frac{0.275}{12} \rightarrow$$

$$45 \times 0.275 = 12.f_1$$

$$f_1 = \frac{45 \times 0.275}{12} = 1.0312Nt$$

مثال (17):. مقدار القوة اللازم استخدامها في هذه الرافعة لرفع جسم وزنه 45 نيوتن. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن 75 كغم نحو 5 ليترات فاذا علمت ان كمية الدم في جسم الأنسان تتغير طردياً تبعاً لوزنه جد ثابت التغير واكتب معادلة تربط بين كمية الدم والوزن ثم جد كمية الدم لشخص وزنه 60 نيوتن.

نجد اولاً ثابت التغير وكالاتي:

بما ان الوزن ∝ كمية الدم وحسب تعريف التغير الطردي فان:

الوزن k = كمية الدم

$$\therefore k = \frac{\text{كمية الدم}}{\text{الوزن}} = \frac{5}{75} = \frac{1}{5}$$

ولكتابة معادلة التغير الطردي نفرض ان كمية الدم Q والوزن W فيكون

كمية الدم= ثابت التغير × الوزن

$$Q = \frac{1}{15}.W$$

لحساب كمية الدم لشخص وزنه 60 نيوتن

$$Q = \frac{1}{15}.60 = 4\ litre$$

مثال (18) :. قطع مظلي ارتفاعاً قدره 1950 متر في 10 دقائق عند هبوطه بعد فتح مظلته وفي قفزة ثانية هبط 4750 متراً. فاذا كانت المسافة تتغير طرديا مع الزمن، فما هو الوقت المستغرق لنزول المظلي في القفزة الثانية إذا افترضنا ان سرعة هبوطه ثابته في كلا القفزتين



نفرض أن d تمثل المسافة، t تمثل الزمن

$$d \propto t \Rightarrow d = kt$$

وبالتعويض عن قيم d, t نحصل على:

$$1950 = k\,(10)$$

وتكون معادلة التغير: $d = 195\,t$

الأن نعوض $d = 4750$ لنحصل على الزمن المستغرق للهبوط في القفزة الثانية.

$$4750 = 195\,t \rightarrow t = \frac{4750}{195} = 24.3 \text{ دقيقة}$$

طريقة ثانية : بما ان المسافة تتغير طرديا مع الزمن يكون

$$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} \rightarrow \frac{1950}{10} = \frac{4750}{t_2}$$

$$1950\,t_2 = 47500$$

$$t_2 = \frac{47500}{1950} = 24.3 \text{ دقيقة}$$

التغير العكسي (Inverse Variation)

يقال ان الكمية x تتغير عكسياً تبعاً لتغير الكمية y إذا ارتبطت الكميتان x, y ببعضهما البعض بحيث أن أي تغير في قيمة y يصحبه تغيراً مخالفاً في قيمة x ولكن بالنسبة ذاتها.

- يعبر عن العبارة ((x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y)) بالرموز الرياضية كما يلي :-

$$x \propto \frac{1}{y} \rightarrow \frac{k}{y} \text{ او } xy = k$$

حيث x عدد ثابت ينتمي إلى K ويسمى ثابت التغير.

- إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y فأن :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ او } \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

مثال(19):إذا كانت x تتغيرعكسياً تبعاً لتغيرy وكان y = 12 عندما$x=3$جد قيمة ثابت التغير.

$$x \propto \frac{1}{y} \rightarrow \quad x = \frac{k}{y}$$

$$3 = \frac{k}{12} \rightarrow \quad k = 3.(12) = 36$$

مثال (20):. إذا كانت x تتغير عكسياً تبعاً لتغير y وكان y = 2 عندما x = 8

جد قيمة x عندما y = 0.8

الطريقة الأولى: -

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y}$$

$$8 = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 8 \times 2 = 16$$

$$\therefore \quad x = \frac{16}{y}$$

$$x = \frac{16}{0.8} = \frac{160}{8} \Rightarrow \quad x = 20$$

الطريقة الثانية: -

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{0.8}{2}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{8}{x_2} = \frac{8}{20} \Rightarrow x_2 = 20$$

مثال (21):. إذا كان: $x \propto \frac{1}{y}$, $y \propto \frac{1}{z}$ اثبت ان : $x \propto z$

$$x \propto \frac{1}{y} \rightarrow \quad x = \frac{k_1}{y} \quad , k_1 \in R^+$$

$$y \propto \frac{1}{z} \rightarrow \quad y = \frac{k_2}{z} \quad , k_2 \in R^+$$

$$x = \frac{k_1}{\frac{k_2}{z}} \rightarrow \quad x = k_1 \times \frac{z}{k_2} \rightarrow \quad x = \frac{k_1}{k_2} \times z$$

وبفرض ان $L = \frac{k_1}{k_2}$ يكون $\therefore x = L \times z$:

وبما ان كلا من k_2, k_1 ثابت لذلك فان $L = \frac{k_1}{k_2}$ يكون مقدارا ثابتا ايضا .

اذن $x = L \times z \rightarrow x \propto z$

اذا ارتبط متغير أول بعلاقة عكسية مع متغير ثاني وكان المتغير الثاني مرتبط مع متغير ثالث بعلاقة عكسية فان المتغير الاول يرتبط بالمتغير الثالث بعلاقة طردية.

مثال (22) :. ليكن كل من x, y متغيرين حقيقيين مرتبطين بعلاقة ما، فإذا أخذ المتغيران x, y القيمتين $(10, 22)$ على الترتيب وازدادت قيمة x لتصبح 15 وصاحب ذلك نقصان في قيمة y لتصبح 12 فهل إن علاقة التغير بين x, y علاقة عكسية؟

$x_1 = 10$ $x_2 = 15$ $y_1 = 22$ $y_2 = 12$

سوف نحل المثال بالاعتماد على العلاقة الآتية:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ , } \frac{y_2}{y_1} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_2}{y_1}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي.

يمكن حل السؤال بطريقة أخرى باستخدام العلاقة الآتية $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ , } \frac{x_2}{y_1} = \frac{15}{22}$$

أي أن العلاقة ليست علاقة تغير عكسي. $\frac{x_1}{y_2} \neq \frac{x_2}{y_1}$

مثال (23) من المعلوم أن حجم الغاز يتغير عكسياً مع الضغط المسلط عليه عند ثبوت درجة الحرارة. فإذا كان لدينا غاز محصور في حاوية بحجم $480\ m^3$ ومضغوط بما يساوي 12 ضغط جوي فكم يكون حجم الغاز إذا تم تخفيف الضغط المسلط عليه إلى 8 ضغط جوي؟

الطريقة الأولى: بفرض إن حجم الغاز هو V وإن الضغط المسلط عليه يكون:

$$V \propto \frac{1}{P} \rightarrow V = \frac{k}{P} \rightarrow k = V.P$$

$$k = 480.(12) = 5760$$

لذلك يكون $5760 = V.8$

$\therefore$ الحجم الجديد الغاز $V = \frac{5760}{8} = 720\ cm^3$

وبطريقة ثانية يمكن حل السؤال :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{480}{V_2} = \frac{8}{12} \rightarrow$$ الحجم الجديد للغاز

$$V_2 = \frac{480.(12)}{8}$$

$$V_2 = 720cm^3$$

مثال (24): اذا كان مقدار سرعة تدفق الماء v من فوهة خرطوم رش المياه يتغير عكسيا مع مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم ، وكانت $r = 2.5cm$ عندما $r = 3cm$ جد قيمة v عندما $r = 2.5cm$

الطريقة الأولى :

$$\because v \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow \quad v = \frac{k}{r^2}$$

$$5 = \frac{k}{3^2} \rightarrow 5 = \frac{k}{9} \rightarrow k = 5 \times 9 = 45$$

$$\therefore v = \frac{45}{(2.5)^2} = \frac{45}{6.25} = \frac{4500}{625} = 7.2\ cm^3/sec$$

الطريقة الثانية :

$$\therefore v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(r_2)^2}{(r_1)^2}$$

$$\frac{5}{v_2} = \frac{(2.5)^2}{3^2} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{v_2} = \frac{6.25}{9} \rightarrow 6.25v_2 = 45$$

$$v_2 = \frac{45}{6.25} = \frac{4500}{625} = 7.2\frac{cm^3}{sec}$$

تمارين 3-2

1) إذا كان $\sqrt{x} \propto \sqrt[3]{y}$ وكانت y = 27 عندما x = 4 فما قيمة x عندما y = -1 ؟

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt[3]{y_1}}{\sqrt[3]{y_2}}$$
$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{-1}}$$
$$\frac{4}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{-1}$$
$$\sqrt{x_2} = \frac{-1 \times 2}{3} = \frac{-2}{3}$$
$$x_2 = \frac{4}{9}$$

2) إذا كان y يتغير عكسياً تبعاً لتغير x وكان x = 16 عندما y = 25 ، فما قيمة y عندما x = 20 ؟

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$
$$\frac{16}{20} = \frac{y_2}{25}$$
$$y_2 = \frac{25 \times 16}{20} = 20$$

3) إذا كان x يتغير عكسياً تبعاً لتغير 12 وكان x = 8 عندما y = 3 فما قيمة y عندما x = 2 ؟

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(y_2)^2}{(y_1)^2}$$
$$\frac{8}{2} = \frac{(y_2)^2}{3^2}$$
$$\frac{4}{1} = \frac{{y_2}^2}{9}$$
$${y_2}^2 = 36$$
$$y_2 = \pm 6$$

4) إذا كان x يتغير طردياً تبعاً لتغير y وكان y = 10 عندما x = 5 فما قيمة y عندما x = 15 ؟

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \frac{5}{15} = \frac{10}{y_2}$$

$$y_2 = \frac{10 \times 15}{5} = 30$$

$$x^2 - y^2 \propto x.y \rightarrow x = ky$$

$$k^2y^2 - y^2 \propto ky.y \rightarrow k^2y^2 - y^2 \propto ky^2$$

$$\frac{k^2y^2 - y^2}{ky^2} = l$$

$$\frac{y^2(k^2 - 1)}{ky^2} = l$$

$$l = \frac{k^2 - 1}{k}$$

5) إذا كان $y \propto x$ أثبت أن $x^2 - y^2 \propto x.y$

$$x = ky$$

$$x^2 - y^2 = (ky)^2 - y^2 = (k^2 - 1)$$

$$Xy = (ky)y = ky^2$$

$$Xy = ky^2$$

$$x^2 - y^2 = \frac{(k^2 - 1)}{k}(xy)$$

$$x^2 - y^2 \propto xy$$

6) إذا كانت $7x+ \propto 4x + 3y$ اثبت أن $x \propto y$

$$7x + 5y = k(4x + y)$$

$$7x + 5y = 4xk + 3ky$$

$$7x - 4kx = 3ky - 5y$$

$$(7 - 4k)x = (3k - 5)y$$

$$X = \frac{3k - 5}{7 - 4k}y$$

$$X = Ly$$

$$x \propto y$$

7) إذا كان $y \propto x$ و $w \propto v$ اثبت أن $x \times v \propto y \times x$

$x = k_1 y$ $\quad$ $v = k_2 w$

$xv = k_1 y . k_2 w$

$xv = k_1 k_2 yw$

$L = k_1 . k_2$

$xv = Lyw$

8 اثبت ان $y \propto s$ إذا علمت ان:

$$\frac{y}{s} = \frac{21x - y}{7x - s}$$

$y(7x - 5) = s(21x - y)$

$7yx - ys = 21sx - ys$

$[7yx = 21sx]$

$y = 3s$

$y \propto s$

9) إذا علمت ان الزمن الذي يفصل بين رؤية البرق وسماع صوت الرعد يتغير طردياً تبعاً للمسافة بينك وبين موقع البرق، فاذا سمعت صوت البرق بعد 15 ثانية من مشاهدة الرعد في منطقة تبعد عنك مسافة 5km اكتب المعادلة التي تمثل العلاقة بين المسافة وزمن سماع الرعد ثم جد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد 20 ثانية من رؤية البرق.

$t \propto d$

$t = kd$

$15 = k(5) \rightarrow K = \frac{15}{5} = 3$

$t = 3d$

$20 = 3d \rightarrow d = \frac{20}{3} m$

10) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت V ، فاذا كان ارتفاعها h يتغير عكسياً مع مربع طول نصف قطرها r وكان $h = 27cm$ عندما $r = 10.5cm$ ، عندما $r = 15.75\ cm$

$h \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow h = \frac{k}{r^2}$

$27 = \frac{k}{(10.5)^2} \rightarrow K = 27 \times (10.5)^2$

$h = \frac{27 \times (10.5)^2}{(15.75)^2} = 12m$