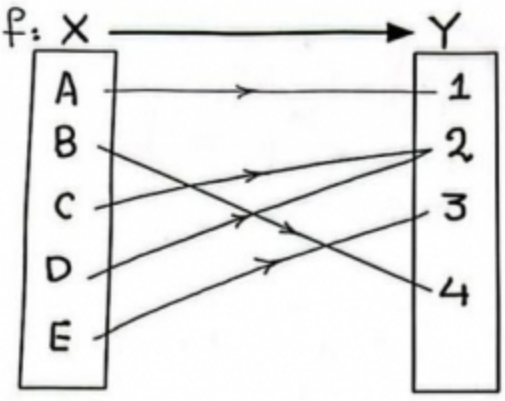
الفصل الثاني - الدالة - الاول مرتبة

مفهوم الدالة :-



5

① بيان الدالة f :- هي مجموعة الأزواج مرتبة (x,y) حيث $x \in X$, $y \in Y$.

② مدى الدالة f :- مجموعة عناصر الصور الناتجة من هذه الدالة.

③ المتغير x يسمى (مستقل) أما المتغير $y=f(x)$ يسمى (مُعتمد) لانه يعتمد على قيمة x.

$y=f(x)$ لا تنسوون

مثال ① اذا كان $X=\{-2,-1,0,2,3\}$, $Y=\{-1,1,17,7\}$

وكان: $f: X \to Y : y=f(x)=2x^2-1$

جد: 1) مدى الدالة. 2) بيان الدالة. 3) مخططها السهمي

$f(x)=2x^2-1$

$f(-2)=2(-2)^2-1=8-1=\boxed{7}$

$f(-1)=2(-1)^2-1=2-1=\boxed{1}$

$f(0)=2(0)^2-1=0-1=\boxed{-1}$

$f(2)=2(2)^2-1=8-1=\boxed{7}$

$f(3)=2(3)^2-1=18-1=\boxed{17}$

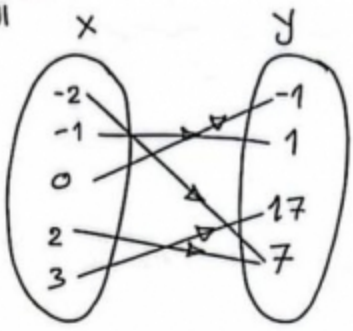
قبل ايجاد المطاليب يجب تعويض جميع عناصر المجال في الدالة f(x)

Scanned with CamScanner

① مدى الدالة $= \{7, 1, -1, 17\}$

② بيان الدالة $= \{(-2,7), (-1,1), (0,-1), (2,7), (3,17)\}$

③ المخطط السهمي



مثال واجب: اذا كان $A = \{0, 2, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$

وكان: $f: A \to B : y = f(x) = x + 2$

جد: 1) مدى الدالة. 2) بيان الدالة. 3) مخططها السهمي.

أنواع الدوال :-

① متعددة الحدود
- الثابتة: $f(x) = -2$
- الخطية: $y = 5x + 1$
- التربيعية: $f(x) = x^2 - 3x$
- التكعيبية: $y = x^3$

② الكسرية: $f(x) = \frac{3}{x}$

③ الجذرية: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

مجال الدالة ومداها :

- اوسع مجال للدالة :

① الدالة متعددة الحدود: (الثابتة ، الخطية ، التربيعية ، التكعيبية)

[اوسع مجال لها هو $\mathbb{R}$ [

مثال ② جد أوسع مجال للدوال الاتية :

① $f(x) = -5$ ثابتة : أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$

② $y = 2x^3 + 5x$ تكعيبية : أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

② **الدالة الكسرية**: لإيجاد أوسع مجال لها :

أ) نعين مقام الدالة و نجد قيم (x)

ب) أوسع مجال للدالة هو : $\mathbb{R}/\{\text{قيم } (x)\}$

مثال ③ جد أوسع مجال للدوال الآتية :

① $f(x)=\frac{1}{x-3}$

$x-3=0$

$\boxed{x=3}$ أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}/\{3\}$

② $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$

$x^2-9=0$

$(x-3)(x+3)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

أو $x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$

أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}/\{3,-3\}$

③ $f(x)=\frac{x-13}{x^2-5x-6}$

$x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$

أما $x-6=0$

$\boxed{x=6}$

أو $x+1=0$

$\boxed{x=-1}$

	6
3	6
2	1
1	5 ⑤ 7

أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}/\{-1,6\}$

③ **الدوال الجذرية** : تعتمد على دليل الجذر (قوة الجذر)

أ) القوة فردية : أوسع مجال لها هو $\mathbb{R}$

ب) القوة زوجية :

① نأخذ (≥ 0 ما تحت الجذر) و نحل المتباينة.

② أوسع مجال هو ناتج حل المتباينة.

CS Scanned with CamScanner

مثال ④ جد أوسع مجال للدوال :

① $f(x) = \sqrt{x-3}$

$x - 3 \geq 0$

$\boxed{x \geq 3}$

أوسع مجال للدالة هو : $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

② $f(x) = \sqrt[5]{2x-5}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$

تمرين واجب : جد أوسع مجال للدوال الآتية :

① $f(x) = \dfrac{-2}{5}$

② $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$

③ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x$

④ $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x-9}$

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$

⑥ $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

⑦ $f(x) = \sqrt{1-3x}$

Scanned with CamScanner

مدى الدالة :-

① الدالة الثابتة :- $f(x) = a$ المدى : $\{a\}$

مثال ④ ما مدى الدالة : $f(x) = -7$

مدى الدالة هو : $\{-7\}$

② الدالة الخطية :- مداها هو : $\mathbb{R}$.

مثال ⑤ ما مدى الدالة : $f(x) = 3x - 4$

مدى الدالة هو : $\mathbb{R}$

③ الدالة التربيعية :- لإيجاد مداها :

ⓐ نستبدل $f(x)$ بـ (y) .

ⓑ نجد قيمة x بدلالة y .
- ⓐ x^2 بطرف وباقي المقادير بطرفاً
- ⓑ نقسم على معامل x^2 - إن وجد -
- ⓒ ثم نجذر الطرفين

ⓒ ناتج حل المتباينة [≥ 0 مقدار داخل الجذر] يمثل المدى .

مثال ⑦ ما مدى الدالة : $f(x) = x^2 - 1$

$y = x^2 - 1$

$(\sqrt{y+1} = \sqrt{x^2})$ بالجذر

$\sqrt{y+1} = x$

$y + 1 \geq 0$

$\boxed{y \geq -1}$

مدى الدالة هو : $[-1, +\infty) = \{y : y \in \mathbb{R},\ y \geq -1\}$

سؤال واجب : جد مدى الدوال الآتية :

① $f(x) = 5$

② $f(x) = 2x + 4$

③ $f(x) = 1 - x^2$

Scanned with CamScanner

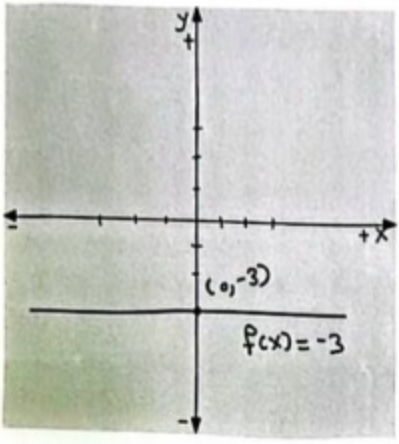
التمثيل البياني للدالة :-

① الدالة الثابتة :- $[f(x)=a]$:-

- نعين النقطة $(0,a)$ و نرسم منها مستقيم يوازي المحور x .

مثال ⑧ مثل الدالة $f(x)=-3$ بيانيا".

النقطة : $(0,-3)$



② التمثيل البياني لدوال الخطية :- $[X]$:-

① نستبدل $f(x)$ بـ (y).

② نعوض مرة $(x=0)$ و نجد قيمة y ، مرة $(y=0)$ و نجد قيمة x .

③ نعين النقطتين على المحورين الاحداثيين و نوصل بينهما بمستقيم.

مثال ⑨ مثل الدالة $f(x)=2x-7$ بيانيا".

$y=2x-7$

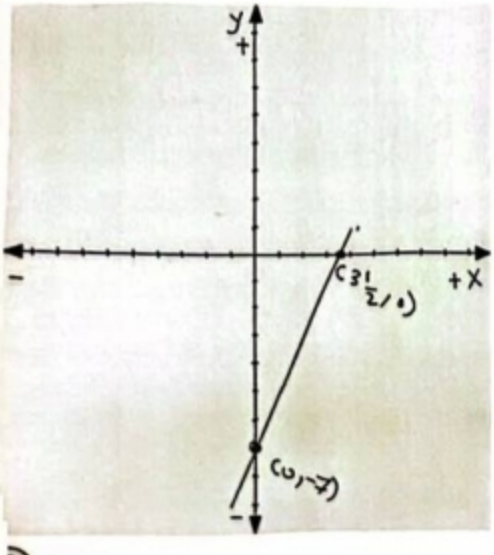
$x=0 \Rightarrow \boxed{y=-7}$

$y=0$: $0=2x-7$

$(7=2x)\div 2$

$3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=x \Rightarrow \boxed{x=3\frac{1}{2}}$

x	y	(x,y)
0	-7	(0,-7)
$3\frac{1}{2}$	0	$(3\frac{1}{2},0)$



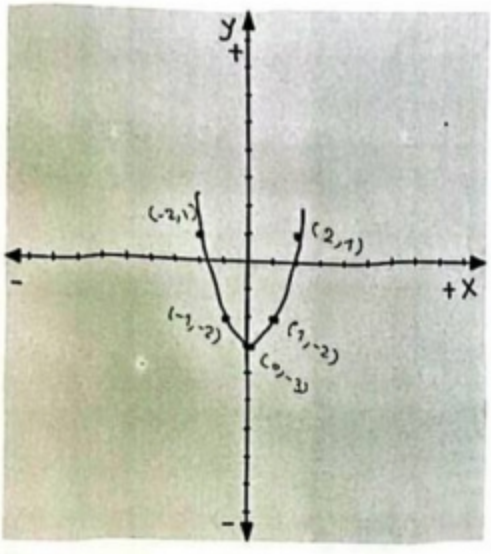
Scanned with CamScanner

③ التمثيل البياني للدالة التربيعية :- [x^2] :-

① نعوض خمس قيم لـ(x) في الدالة : (-2، -1، 0، 1، 2)
فتنتج خمس قيم لـ(y).
② نضع قيم (x) و قيم (y) في جدول بشكل نقاط (x، y).
③ نعين النقاط الخمسة على المحورين الاحداثيين و نوصل بينها.
[يكون الرسم بشكل ∪ اذا كانت x^2 موجبة و ∩ اذا x^2 سالبة]

مثال ⑩ مثل الدالة $f(x) = x^2 - 3$ بيانياً.

$f(-2) = (-2)^2 - 3 = 1$
$f(-1) = (-1)^2 - 3 = -2$
$f(0) = (0)^2 - 3 = -3$
$f(1) = (1)^2 - 3 = -2$
$f(2) = (2)^2 - 3 = 1$



x	y	(x, y)
-2	1	(-2, 1)
-1	-2	(-1, -2)
0	-3	(0, -3)
1	-2	(1, -2)
2	1	(2, 1)

ملاحظة لتمثيل الدالة التكعيبية بيانياً نتبع نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية.

سؤال واجب : ① مثل الدالة $f(x) = 2$ بيانياً.
② مثل الدالة $f(x) = x$ بيانياً.
③ مثل الدالة $f(x) = 2 - x^2$ بيانياً.
④ مثل الدالة $f(x) = x^3$ بيانياً.

CS Scanned with CamScanner

جبر الدوال :-

① $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

② $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

③ $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

④ $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

⑪ اذا كانت $g(x)=x+3$, $f(x)=x^2-3$ جد كل مما يأتي :-

①$(f+g)(x)$ ②$(f-g)(x)$ ③$(f.g)(x)$ ④$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

① $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$= x^2-3 + x+3$
$= x^2+x$

② $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$= x^2-3 - (x+3)$
$= x^2-3-x-3$
$= x^2-x-6$

③ $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
$= (x^2-3)(x+3)$
$= x^3+3x^2-3x-9$

④ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-3}{x+3}$

Scanned with CamScanner

كرة المثال الاتي: إيجاد بيان ومدى الدالة ومخططها السهمي من قاعدة الاقتران

مثال5 اذا كان $A = \{0,2,4\}$ ، $B = \{2,4,6\}$ وكان :

$$f: A \to B: y = f(x) = x + 2$$

جد: 1) بيان الدالة 2) مدى الدالة 3) مخططها السهمي

الحل:

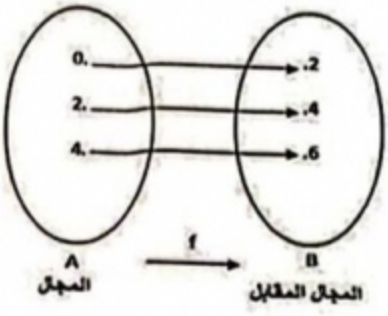
نكتب قاعدة اقتران الدالة المعطاة $y = f(x) = x + 2$

نعوض بالدالة قيم مجال الدالة وهي عناصر المجموعة A

$$y = f(0) = 0 + 2 = 2$$
$$y = f(2) = 2 + 2 = 4$$
$$y = f(4) = 4 + 2 = 6$$

1) بيان الدالة: هو مجموعة الأزواج المرتبة (عنصر، صورته) وكالاتي:

$$\{(0,2), (2,4), (4,6)\}$$



2) المدى: هو مجموعة الصور لكل عناصر المجال أي ان المدى: $\{2,4,6\}$

3) المخطط السهمي: نرسم شكلين (فليكونا بيضويين) ونكتب قيم المجموعتين في الشكلين ونوصل بين كل عنصر من المجال مع صورته في المجال المقابل بسهم.

Scanned with CamScanner

مثال 6 إذا كان $X = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ $Y = \{-1, 1, 17, 7\}$ وكان

$$f: X \to Y: y = f(x) = 2x^2 - 1$$

جد: 1) بيان الدالة 2) مدى الدالة 3) مخططها السهمي

الحل:

نكتب الدالة المعطاة $y = f(x) = 2x^2 - 1$

نعوض بالدالة قيم مجال الدالة وهي عناصر المجموعة A

$$y = f(-2) = 2(-2)^2 - 1 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$y = f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$y = f(0) = 2(0)^2 - 1 = 2(0) - 1 = -1$$

$$y = f(2) = 2(2)^2 - 1 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$

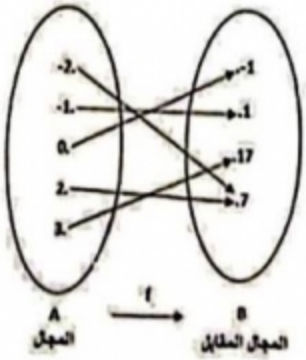
$$y = f(3) = 2(3)^2 - 1 = 2(9) - 1 = 18 - 1 = 17$$

1- بيان الدالة: هو مجموعة الأزواج المرتبة (عنصر، صورته) وكالاتي: -

$$\{(-2,7), (-1,1), (0,-1), (2,7), (3,17)\}$$

2- مدى الدالة: هو مجموعة الصور لكل عناصر المجال أي ان المدى هو $\{1, -1, 7, 17\}$

3-المخطط السهمي:



Scanned with CamScanner

لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال 7 جد أوسع مجال للدوال الآتية:

1) $f(x) = -5$

2) $f(x) = 2x + 3$

3) $f(x) = x^2 + x + 3$

4) $f(x) = x^3 - 2$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

الحل:

1) $f(x) = -5$

الدالة ثابتة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x + 3$

الدالة خطية لذا فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 + x + 3$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثانية لذا فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4) $f(x) = x^3 - 2$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثالثة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

الدالة متعددة حدود من الدرجة الثالثة لذلك فان أوسع مجال لها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

ثانياً) الدوال الكسرية: ان اوسع مجال الدالة الكسرية هو: $\mathbb{R}$ ما عدا قيم xالتي تجعل المقام يساوي صفراً

فكرة المثال الاتي: التعرف على طريقة إيجاد أوسع مجال لدالة كسرية.

مثال 8 جد أوسع مجال للدالة لكل من الدوال الأتية:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x}$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$

4) $f(x)=\dfrac{x-13}{x^2-5x-6}$

الحل:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$

اي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x\in\mathbb{R}/3\}$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x}$

$$4-x=0\Rightarrow x=4$$

اي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x\in\mathbb{R}/4\}$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$

$$x^2-9=0\Rightarrow x=\pm3$$

اي ان أوسع مجال للدالة هو: $\{x\in\mathbb{R}/\pm3\}$

4) $f(x)=\dfrac{x-13}{x^2-5x-6}$

$$x^2-5x-6=0\Rightarrow(x-3)(x-2)=0$$

اما $(x-3)=0\Rightarrow x=3$, او $(x-2)=0\Rightarrow x=2$

اي ان أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}/\{2,3\}$.

Scanned with CamScanner

ثالثاً) الدوال الجذرية: -لإيجاد مجال الدالة الجذرية نعتمد على دليل الجذر وكما يأتي: -

1. إذا كان دليل الجذر فردياً أي $\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x} \ldots\ldots$ فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$
2. إذا كان دليل الجذر زوجياً أي $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}$ فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا القيم التي تجعل المقدار الجبري داخل الجذر مقداراً سالباً.

فكرة المثال الآتي: في الدوال الجذرية إذا كان دليل الجذر فردياً فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ، أما إذا كان الدليل زوجياً فأننا نجعل ما بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً ونبسط المتراجحة الناتجة لنحصل على المجموعة التي تمثل أوسع مجال للدالة.

مثال 9 جد أوسع مجال للدالة لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{4-x^2}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

5) $f(x) = \sqrt[6]{x^2-9}$

الحل:

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$

حيث ان دليل الجذر زوجي فإننا نجعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفر (أي قيماً غير سالبة فقط) أي: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

أي ان أوسع مجال للدالة هو: $(x \in \mathbf{R}, x \geq 3)$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

بما إن الجذر دليله فردي فإن أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{4-x^2}$

بما ان الجذر دليله زوجي لذلك يجب جعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً .

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4$$

لضرب المتراجحة بالعدد (-1) ولاحظ تغير علامة التباين بسبب الضرب بعدد سالب

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 2^2$$

وباستخدام المبرهنة الآتية التي درستها في الفصل الثاني:

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإن مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة المغلقة $[-a, +a]$

لذلك يكون أوسع مجال للدالة هو $[-2, +2]$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

بما ان الجذر دليله فردي فان أوسع مجال للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$

5) $f(x) = \sqrt[6]{x^2-9}$.

بما ان الجذر دليله زوجي لذلك نجعل المقدار الذي بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً

$$x^2 - 9 \geq 0$$
$$x^2 \geq 9$$
$$x^2 \geq 3^2$$

وباستخدام النتيجة الآتية التي درستها في الفصل الثاني:

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإن مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq a^2$ هي المجموعة $\mathbf{R}/(-a, a)$

لذلك يكون أوسع مجال للدالة هو $\mathbf{R}/(-3, 3)$.

Scanned with CamScanner

الحل:

1) $f(x) = -7$

الدالة ثابتة لذلك يكون المدى: $\{y \in \mathbb{R}; y = -7\}$

2) $f(x) = x + 1$

الدالة خطية لذلك يكون المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) $f(x) = 3x - 4$

الدالة خطية لذلك يكون المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4) $f(x) = x^2 - 1$

الدالة تربيعية ولذلك لا بد من اتباع الخطوات الآتية:

$y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1$

نستخرج بدلالة y فنحصل على $x = \pm\sqrt{y+1}$

الآن نجعل ما بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً أي:

$y + 1 \geq 0$

$y \geq -1 \Rightarrow$ المدى $\{y \in \mathbb{R}; y \geq -1\}$

5) $f(x) = 3x^2 + 6$

$y = 3x^2 + 6$

$3x^2 = y - 6$

بقسمة المعادلة على 3 نحصل على

$x^2 = \frac{1}{3}y - 2$

وبجذر الطرفين (لكي نحصل على x بدلالة y) نتوصل الى

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}y - 2}$

الآن نجعل ما بداخل الجذر أكبر أو يساوي صفراً أي:

$\frac{1}{3}y - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y \geq 2$

نضرب الطرفين بالعدد (3) فنحصل على $y \geq 6$

فيكون المدى: $\{y \in \mathbb{R}; y \geq 6\}$

6) $f(x) = x^3 - 2$

الدالة تكعيبية لذلك فإن المدى يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

7) $f(x) = -3\sqrt{x}$

Scanned with CamScanner

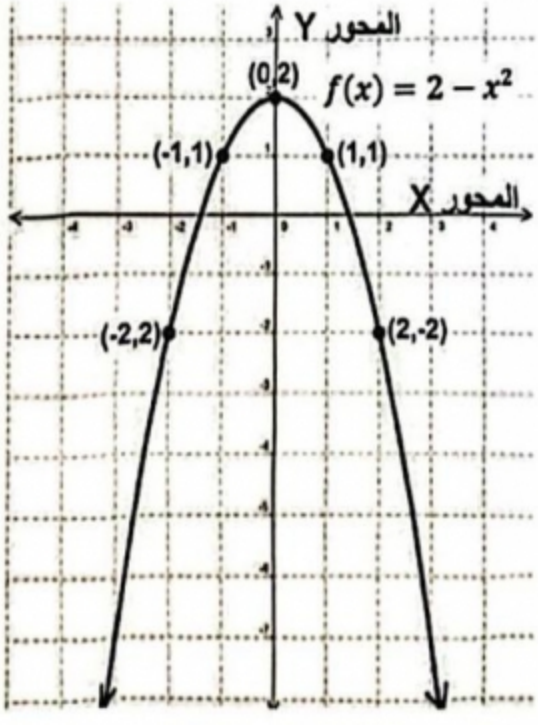
ة المثال الاتي: الدوال التي بالصيغة $f(x) = a - x^2, a \in \mathbb{R}$ يكون التمثيل البياني لها منحنى
اظر حول نقطة تقع على المحور y وأطراف المنحني متجهة إلى الأسفل نحو المالانهاية.

مثال 17 مثل الدالة الأتية بيانيا: $f(x) = 2 - x^2$

الحل / نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = 2 - x^2$	(x, y)
-2	$y = f(x) = 2 - (-2)^2 = 2 - 4 = -2$	$(-2, -2)$
-1	$y = f(x) = 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1$	$(-1, 1)$
0	$y = f(x) = 2 - 0^2 = 2 - 0 = 2$	$(0, 2)$
1	$y = f(x) = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = f(x) = 2 - 2^2 = 2 - 4 = -2$	$(2, -2)$

إن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة
نا متناظر حول النقطة $(0,2)$ وان أطراف المنحني متجهة إلى الأسفل نحو المالانهاية.كما في
شكل 2-11 أدناه



Scanned with CamScanner

الة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$$x \geq 0 \Rightarrow D = [0, \infty)$$
$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$f(4) = \sqrt{4} = -6$$

حظ ان قيمة الدالة تناقصت عند زيادة قيمة x ولذلك فان المدى هو الفترة $(0, -\infty]$ والتي يمكن تعبر عنها بالصيغة الاتية : $\{y \in \mathbb{R} : y \leq 0\}$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

الة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2^2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2, x \leq -2\} = \mathbb{R}/(-2,2)$

نختار قيماً للمتغير x تنتمي إلى المجال ولتكن $-3, -2, 2, 3$

$$f(-3) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$
$$f(-2) = \sqrt{4-4} = 0$$
$$f(2) = \sqrt{4-4} = 0$$
$$f(3) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

لاحظ ان الدالة تأخذ قيمة الصفر عند حدود الفترة $[-2,2]$ وتتزايد قيمتها عند زيادة قيمة لمتغير x وتتزايد قيمتها ايضاً عند تناقص قيمة المتغير x ولذلك فان المدى هو الفترة $[0, \infty)$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

9) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

الة جذرية لذلك نتبع الخطوات الأتية:

$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4^2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 4\} = [-4,4]$

نختار قيماً للمتغير x تنتمي إلى المجال ولتكن $-4, -3, 0, 3, 4$

$$f(-4) = \sqrt{16 - 16} = 0$$
$$f(-3) = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = 2.6$$
$$f(-2) = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$f(0) = \sqrt{16 - 0} = 4$$
$$f(1) = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15} = 3.87$$
$$f(4) = \sqrt{16 - 16} = 0$$

لاحظ ان الدالة أخذت اعلى قيمة لها عند $x = 0$ وهي $y = 4$ ثم بدأت بالتناقص وعادت إلى مة $y = 0$ عند $x = 4$ ، و $x = -4$ وهي حدود فترة مجالها وعليه فان المدى لهذه الدالة هو فترة $[0,4]$ والتي يمكن ان نعبر عنها بالصيغة الاتية $\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 4\}$ ويتضح ذلك يا في المخطط البياني للدالة وكما في الشكل 2-7 الاتي

Scanned with CamScanner

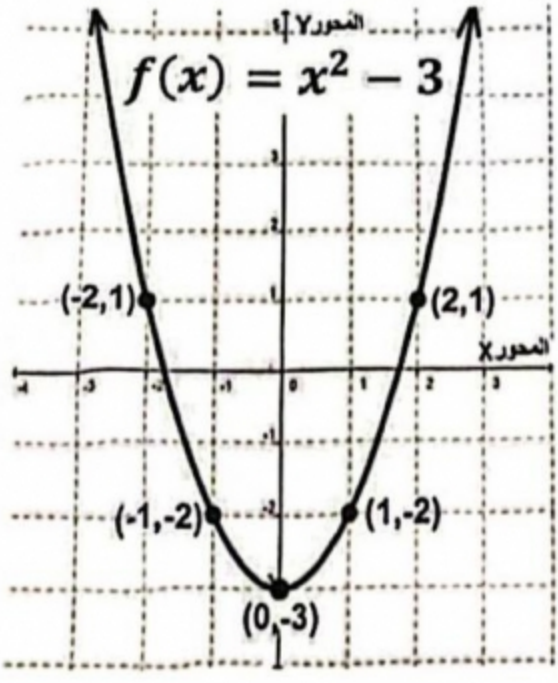
التمثال الاتي: الدوال التي بالصيغة $f(x) = x^2 + a, a \in \mathbb{R}$ يكون التمثيل البياني لها منحني متناظر حول نقطة تقع على المحور y وأطراف المنحني متجهة إلى الأعلى نحو المالانهاية.

مثال 16 مثل الدالة الأتية بيانياً : $f(x) = x^2 - 3$

نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = x^2 - 3$	(x, y)
-2	$y = f(x) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$	$(-2,1)$
-1	$y = f(x) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$	$(-1,-2)$
0	$y = f(x) = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$	$(0,-3)$
1	$y = f(x) = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$	$(1,-2)$
2	$y = f(x) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$	$(2,1)$

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول النقطة $(0,-3)$ وان أطراف المنحني متجهة إلى الأعلى نحو المالانهاية كما في الشكل 2-10 أدناه



Scanned with CamScanner

فكرة المثال الاتي: في دوال الجذور ذات الدليل الزوجي لا بد اولاً من استخراج أوسع مجال للدالة كي نختار منه قيماً للمتغير x في الجدول وكذلك لا بد من ان نراعي ان تعطي القيم المختارة عند التعويض أعدادا صحيحة (قدر الإمكان).

مثال 21 مثل الدالة الأتية بيانياً $f(x) = 2 - \sqrt[2]{x-4}$

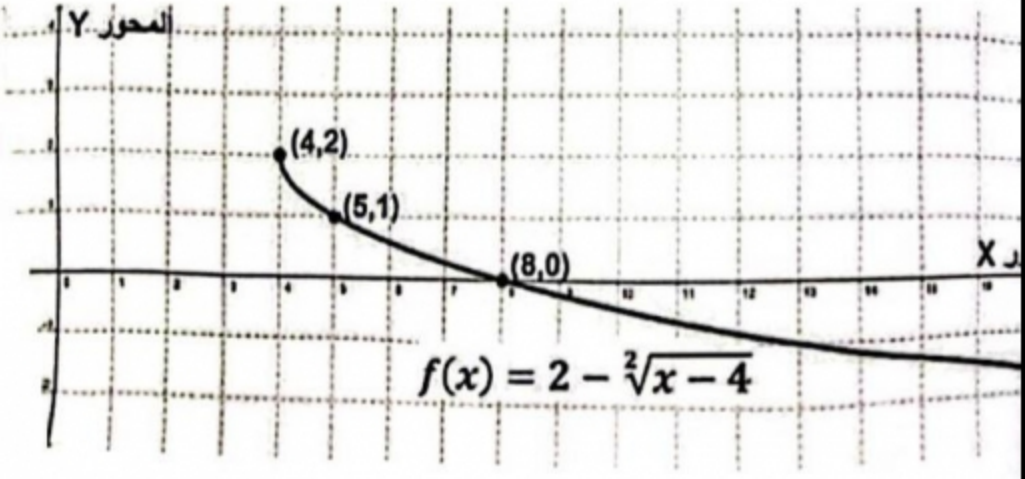
الحل: إيجاد أوسع مجال للدالة:

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

أي اننا نختار قيماً للمتغير x من $x = 4$ صعوداً وسوف نختار قيما تعطي نتائج بأعداد صحيحة

x	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{x-4}$	(x,y)
4	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{4-4} = 2 - 0 = 2$	(4,2)
5	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{5-4} = 2 - 1 = 1$	(5,1)
8	$f(x) = 2 - \sqrt[2]{8-4} = 2 - \sqrt[2]{4} = 2 - 2 = 0$	(8,0)

ن النقاط الثلاث على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحنى الدالة هنا يقع ستقيم $x = -2$ ويكون التمثيل البياني للدالة كما في الشكل2-15 أدناه



Scanned with CamScanner

فكرة المثال الاتي: في دوال الجذور ذات الدليل الزوجي لا بد اولاً من استخراج اوسع مجال للدالة كي نختار منه قيماً للمتغير x في الجدول وكذلك لا بد من ان نراعي ان تعطي القيم المختارة عند التعويض نتائجاً تنتمي إلى مجموعة الأعداد صحيحة (قدر الإمكان).

مثال20

مثل الدالة الأتية بيانياً $f(x) = \sqrt[2]{6-2x}$

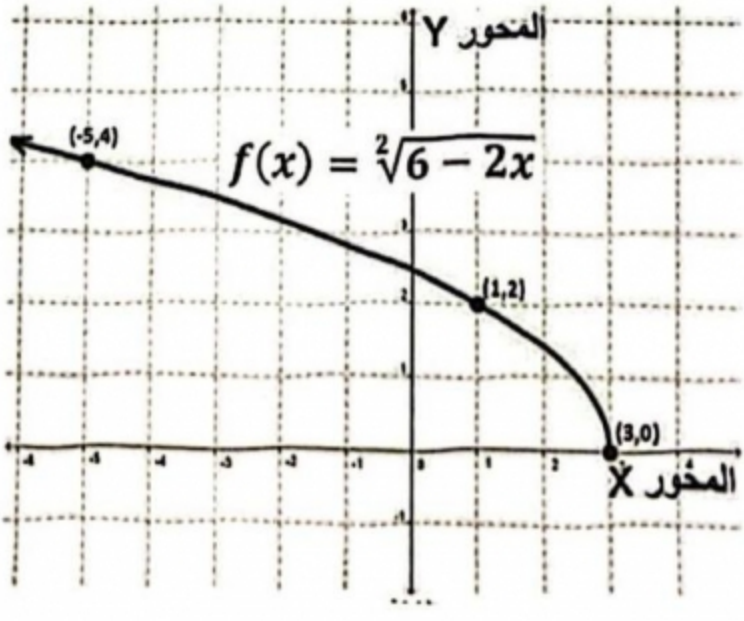
الحل: إيجاد أوسع مجال للدالة:

$$6-2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -6 \Rightarrow x \leq \frac{-6}{-2} \Rightarrow x \leq 3$$

اي أننا نختار قيماً للمتغير x من $x = 3$ نزولاً وسوف نختار قيما تعطي نتائج بأعداد صحيحة

x	$f(x) = \sqrt[2]{6-2x}$	(x,y)
3	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(3)} = \sqrt[2]{6-6} = 0$	(3,0)
1	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(1)} = \sqrt[2]{6-2} = \sqrt[2]{4} = 2$	(1,2)
−5	$f(x) = \sqrt[2]{6-2(-5)} = \sqrt[2]{6+10} = \sqrt[2]{16} = 4$	(−5,4)

الأن نسقط النقاط الثلاث على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا يقع فوق المحور الأفقي x لان الجذور ذات الدليل الزوجي تعطي جذوراً سالبة لا تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ويكون التمثيل البياني للدالة كما في الشكل 2-14 أدناه



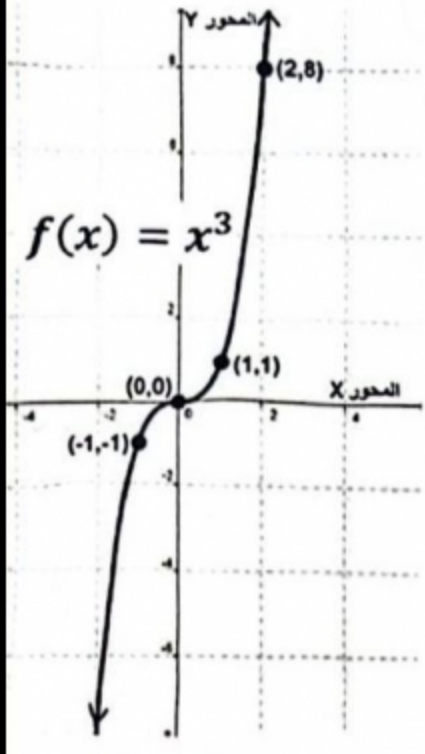
Scanned with CamScanner

فكرة المثال الاتي: منحني الدالة هنا متناظر حول نقطة الاصل (0,0) والجزء الأيمن من منحني الدالة مقعر بينما الجزء الأيسر محدب.

مثال 18 مثل الدالة الأتية بيانياً: $f(x) = x^3$

الحل: نعمل الجدول الاتي:

x	$y = f(x) = x^3$	(x, y)
-2	$y = f(x) = (-2)^3 = -8$	$(-2, -8)$
-1	$y = f(x) = (-1)^3 = -1$	$(-1, -1)$
0	$y = f(x) = 0^3 = 0$	$(0,0)$
1	$y = f(x) = 1^3 = 1$	$(1,1)$
2	$y = f(x) = 2^3 = 8$	$(2,8)$



الشكل 2-12

الأن نعين النقاط الخمسة على المستوى الإحداثي ونوصل بينها بخط منحني. لاحظ ان منحني الدالة هنا متناظر حول نقطة الأصل (0,0) وان الجزء الأيمن للمنحني مقعر ومتجه إلى الأعلى نحو المالانهاية، بينما الجزء الأخر محدب ومتجه إلى الأسفل نحو المالانهاية. كما في الشكل 2-12 المجاور

Scanned with CamScanner