الرياضيات

الاستاذ سامح سلمان البندر

الاول (الرابع) المهني للاقسام
الامن السيبراني -تكرير النفط
الاجهزة الطبية - تجميع وصيانة الحاسوب - شبكات الحاسوب -الاتصالات - الليزر - الكهرباء - الالكترون - الميكانيك



2026

07736642035
@sameh_88

اساسيات الرابع المهني

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Solution set	$S.s$	مجموعة الحل
Null set	ϕ	المجموعة الخالية
The General Formula O The Equation of The stright line	$ax + by + c = 0,$ $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	الصيغة العامة لمعادلة المستقيم
The constitution	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	الدستور (القانون)
Distinctive factor	$b^2 - 4ac$	العامل المميز
Open Interval	$(a,b)=\{x : a < x < b\}$	الفترة المفتوحة
Closed Interval	$[a,b]=\{x : a \leq x \leq b\}$	الفترة المغلقة
Half closed interval	$[a,b)=\{x: a \leq x < b\}$ $(a,b]=\{x: a < x \leq b\}$	الفترة نصف المغلقة

المعادلات

حل المعادلة من الدرجة الاولى

01 الطريقة الجبرية

اولا:.اسلوب الحذف: ويتلخص هذا الاسلوب بمساواة القيمة العددية لمعاملي أحد المتغيرين في كل من المعادلتين ثم جمع او طرح احدهما من الاخر بهدف حذف أحد المتغيرين و الامثلة الاتية توضح الاسلوب هذا :

مثال(4):. جد مجموعة حل المعادلتين الاتيتين :

$$5x + 4y = 8 \dots (1$$
$$3x - 2x = 7 \dots (2$$

الحل / بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 نحصل على

$$5x + 4y = 8 \dots (1$$
$$6x - 4y = 14 \dots (2$$

بالجمع بين المعادلتين نحصل على

$$11x = 22$$
$$x = \frac{22}{11} \rightarrow x = 2$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على

$$5.(2) + 4y = 8$$
$$10 + 4y = 8$$
$$4y = -2$$
$$y = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$S.s = \left\{\left(2, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ثانياً :.أسلوب التعويض: ويتلخص هذا الاسلوب بإيجاد القيمة العددية لأحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر من إحدى المعادلتين لنحصل على معادلة ثالثة نقوم بتعويضها بالمعادلة الأخرى، يلي ذلك استخراج قيمة المتغير بطريقة عزل المتغيرات بجهة والثوابت بجهة ثانية ثم تعويض تلك القيمة بالمعادلة الثالثة بهدف إيجاد قيمة المتغير الثاني والأمثلة الآتية توضح هذا الاسلوب.

مثال (5) :.جد مجموعة حل المعادلين الاتيتين :

$$4x - y = -5 \dots (1$$

$$8x + 5y = 32 \dots (2$$

الحل / نستخرج قيمة y من المعادلة (1) فنحصل على

$$y = 4x + 5 \dots \dots (3$$

ونعوض هذه القيمة بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يأتي :

$$8x + 5(4x + 5)32$$

$$8x + 20x + 25 = 32$$

$$28x = 32 - 25$$

$$28x = 7$$

$$x = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (3) نحصل على

$$y = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 5$$

$$y = 1 + 5 = 6$$

$$Ss = \left\{\left(\frac{1}{4}, 6\right)\right\}$$

مثال(6):. جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: -

$$2x - y = 4 \dots\dots (1$$
$$4x - 2y = 10 \dots (2$$

الحل // نستخرج قيمة y من المعادلة (1) فنحصل على $y = 2x - 4$
ونعوض القيمة هذه بالمعادلة (2) لنحصل على قيمة x كما يأتي: -

$$4x - 2(2x - 4) = 10$$
$$4x - 4x + 8 \rightarrow 10$$
$$8 = 10$$

وهي عبارة خاطئة وعليه يمكننا القول انه ليس لهاتين المعادلتين حل مشترك أي لا يوجد زوج مرتب يمكن أن يحققهما معاً في آن واحد، اذا مجموعة الحل مجموعة خالية أي أن: $S.s = \Phi$

مثال(7):. ما الكسر الذي إذا أضيف العدد (1) إلى بسطه يكون مساوياً للكسر $\frac{\square}{3}$ وإذا أضيف العدد(1) إلى مقامه أصبح مساوياً للكسر $\frac{1}{4}$ ؟

الحل: نفرض إن بسط الكسر هو x وإن مقامه هو y أي إن الكسر هو $\frac{x}{y}$

$$\frac{(x+1)}{y} = \frac{1}{3} \dots (1$$
$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \dots (2$$

نبسط الطرفين باستخدام إحدى خواص التناسب وهي خاصية
(حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

$$y = 3x + 3$$
$$4x = y + 1$$
$$y - 3x = 3 \dots (1$$
$$-y + 4x = 1 \dots (2$$

وبجمع المعادلتين نحصل على

$$x = 4$$

وبتعويض قيمة x بالمعادلة (1) نحصل على قيمة y كما يأتي:

$$\frac{4+1}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 15$$

لذلك فأن الكسر المطلوب هو $\frac{4}{15}$

ثالثاً :. الطريقة البيانية

سبقا ذكرنا ان كل معادلة من الدرجة الأولى بمتغيرين $(ax + by + c = 0)$ تتحقق بعدد لانهائي من الأزواج المرتبة (x, y). ويمكن تمثيل المعادلة هذه بالصيغة $y = f(x) + ax +$ c حيث ان الثوابت $a, c \in R , a \neq 0$، وان $f(x)$ هي قاعدة الاقتران بين y و x وسوف نطلق عليها فيما بعد مصطلح (الدالة) ويمكن تمثيل تلك الدالة بيانياً عن طريق تحديد موقعي زوجين من الأزواج المرتبة آنفة الذكر على الاقل في المستوى الاحداثي والتوصيل بينها فنحصل على خط مستقيم ولهذا السبب تسمى هذه المعادلات بالمعادلات الخطية ويكفي لتمثيلها بيانياً ان نحدد موقع زوجين فقط من الأزواج المرتبة.

ولأجل إيجاد مجموعة الحل لزوج من المعادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً نتبع الخطوات الآتية:

1) نرسم على المستوي الإحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الأولى بتعيين نقطتي تقاطعه مع المحورين.
2) نرسم على المستوي الإحداثي المستقيم الذي يمثل المعادلة الثانية بالطريقة ذاتها.
3) يكون الزوج المرتب الذي يمثل نقطة تقاطع المستقيمين هو مجموعة الحل وفي حالة ظهورمستقيمين مستقيمين متوازيين فإن مجموعة الحل هي مجموعه خالية أي Φ.

ملاحظة: يفضل في أغلب الاحيان تعيين نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الاحداثيين.
1) مع المحور x بتعويض y = 0
(2) مع المحور y بتعويض x = 0

مثال (8): زاويتان متتامتان قياس أحداهما يزيد بمقدار 30° عن أربعة أمثال قياس الزاوية الاخرى جد قياس كلاً من الزاويتين:

الحل / نفرض إن قياس الزاوية الأولى بالدرجات $= x$

وإن قياس الزاوية الثانية بالدرجات $= y$

وبما إن الزاويتين متتامتان فإن :-

الزاويتان المتتامتان :. هما الزاويتان المتتاليتان اللتان مجموعهما 90° درجة .

$$x + y = 90^\circ \dots (1)$$

$$x - 4y = 30^\circ \dots (2)$$

وبضرب المعادلة (2) بالعدد (-1) نحصل على :

$$x + y = 90 \dots (1)$$

$$-x + 4y = -30 \dots (2)$$

بالجمع

$$5y = 60 \rightarrow y = \frac{60}{5} = 12^\circ$$

$$5y = 60 \rightarrow y = \frac{60}{5} = 12^\circ$$ (قياس الزاوية الثانية)

وبالتعويض بالمعادلة (1) نحصل على قياس الزاوية الاولى وكما يأتي:

$$x + 12 = 90$$ (قياس الزاوية الأولى)

$$x = 90 - 12$$

$$x = 78^\circ$$

مثال (9): جد مجموعة حل المعادلتين الاتيتين بيانياً

$$3y = 2x + 20$$
$$\frac{2x}{5} - \frac{y}{10} + 1 = 0$$

الحل : 1) نرسم المستقيم الذي يمثل المعادلة (1) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين.

مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان

$$0 = 2x + 20 \Rightarrow 2x = -20 \Rightarrow x = -10 \Rightarrow (-10, 0)$$

مع المحور y نعوض $x = 0$ ، أي ان

$$3y = 2(0) + 20 \Rightarrow y = 20 = (0, 20) = (0, 6.6)$$

2) نرسم المستقيم الذي يمثل المعادلة (2) باستخراج نقطتي تقاطعه مع المحورين.

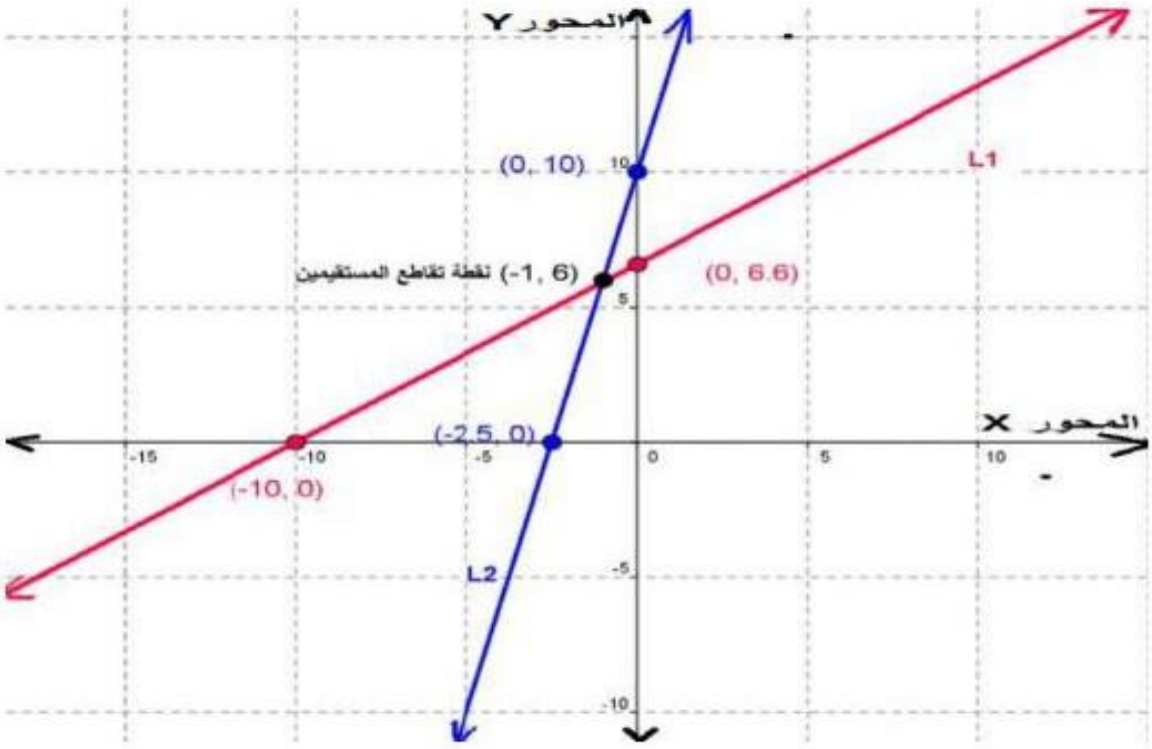
مع المحور x نعوض $y = 0$ ، أي ان:

$$\frac{2x}{5} - 0 + 1 = 0 \rightarrow \frac{2x}{5} = -1 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, 0\right) = (-2.5, 0)$$

مع المحور y نعوض $x = 0$

$$0 - \frac{y}{10} + 1 = 0 \rightarrow -\frac{y}{10} = -1 \rightarrow y = 10 \rightarrow (0, 10)$$

نلاحظ ان نقطة تقاطع المستقيمين وهي النقطة $(-1, 6)$تمثل مجموعة الحل كماموضح في الرسم



تمرين (1-1)

1. جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقة الجبرية :

1) $2x + 3y = 2,\quad 2x - 3y = 0$

$2x + 3y = 2$

$2x - 3y = 0$

$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

نعوض في معادلة (2)

$2(\frac{1}{2}) + 3y = 2$

$3y = 2 - 1 \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

S={$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$}

2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 4\ ,\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$

$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 4 \ \ldots\ldots (1)$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \ \ldots\ldots (2)$

نقوم بضرب المعادلة الاولى في (2) والثانية في(3)

$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} = 8 \ \ldots\ldots (1)$

$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 9 \ \ldots\ldots (2$

$\frac{7}{x} = 17 \Rightarrow x = \frac{7}{17}$

نعوض في معادلة 2

$\frac{3}{\frac{7}{17}} + \frac{6}{y} = 9 \Rightarrow \frac{6}{y} = 9 - \frac{51}{7} \Rightarrow \frac{6}{y} = \frac{63}{7} - \frac{51}{7}$

$\frac{6}{y} = \frac{12}{7} \Rightarrow y = \frac{6x7}{12} = \frac{7}{2}$

s= $\{\frac{7}{17}, \frac{7}{2}\}$

3) $2x - 3y = -44, \quad -(x-8) - 64 = -5y$

$2x - 3y = -44$ .....(1)

$-x + 8 - 64 = -5y$ ... ... (2)

$2x - 3y = -44$

$-x + 5y = 56$

نقوم بضرب المعادلة الثانية في (2) والاولى في (1)

$2x - 3y = -44$ ..... (1)

$-2x + 10y = 112$ ..... (2)

$7y = 68$

$y = \frac{68}{7}$

$2x - 3\left(\frac{68}{7}\right) = -44$

$2x = -44 + \left(\frac{204}{7}\right)$ نضرب المعادلة في (7)

$14x = -308 + 204$

$14x = -104$

$x = \frac{-104}{14}$

$s = \{\frac{-104}{14}, \frac{68}{7}\}$

4) $\frac{2x-5y}{3}-\frac{3x+8y}{11}=-56\ ,\ y=x$

نقوم بتعويض المعادلة الثانية في المعادلة الاولى

$$\frac{2x-5x}{3}-\frac{3x+8x}{11}=-56$$
$$\frac{-3x}{3}-\frac{11x}{11}=-56$$
$$-x-x=-56$$
$$-2x=-56$$
$$x=\frac{-56}{-2}=28$$
$$y=28$$

s={28,28}

5) $\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{1}{5}\ ,\ \frac{2x+y}{x+1}=4$

نأخذ المعادلة الاولى (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$10x-5y=x-2y$$
$$10x-x=-2y+5y$$
$$9x-3y=0 \quad \div(3)$$
$$3x-y=0 \quad \text{.....(1)}$$

نأخذ المعادلة الثانية (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

$$4x+4=2x+y$$
$$4x-2x+4-y=0$$
$$2x-y=-4 \quad \text{.....(2)}$$
$$3x-y=0 \quad \text{.....(1)}$$
$$2x-y=-4 \quad \text{.....(2)}$$

نقوم بضرب المعادلة الثانية في(-1)

$$3x-y=0 \quad \text{.....(1)}$$
$$-2x+y=4 \quad \text{.....(2)}$$

$$x=4$$
$$3(4)-y=0$$

نعوض قيمة x في المعادلة الاولى

$$y=12$$

$S=\{(4,12)\}$

2. جد مجموعة الحل لأزواج المعادلات الآتية بالطريقتين الجبرية والبيانية

6) $2x + y = 4 \ , \ x - y = -1$

$2x + y = 4 \ldots\ldots\ldots (1)$

$x - y = -1 \ldots\ldots\ldots (2)$

$3x = 3 \Rightarrow x = 1$

$2(1) + y = 4$

$y = 4 - 2 = 2$ s={1,2}

7) $2x + 3y = -1 \ , \ 5x + 6y = -3$

$2x + 3y = -1$

$5x + 6y = -3$

بضرب المعادلة الاولى في 2 والثانية في 1

$4x + 6y = -2$

$5x + 6y = -3$

نقوم بعملية الطرح للمعادلتين

$-1x = 1 \Rightarrow x = -1$

$2(-1) + 3y = -1$

$3y = -1 + 2$

$3y = 1$

$y = \frac{1}{3}$

s={-1, $\frac{1}{3}$}

8) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}=1$

نقوم بضرب المعادلة الاولى في (6) والثانية في (9)

$$\frac{6x}{2}+\frac{6y}{3}=12$$

$$\frac{9x}{3}+\frac{9y}{9}=9$$

$$3x+2y=12$$

$$3x+y=9 \quad \text{بالطرح}$$

$$y=3 \quad \text{نعوض في المعادلة}$$

$$3x+3=9$$

$$3x=9-3$$

$$3x=6$$

$$x=2 \qquad s=\{2,3\}$$

3) عدد مؤلف من رقمين مجموع رقمي مرتبتيه يساوي 9 ، فإذا أستبدلنا آحاده بعشراته حصلنا على عدد يقل عن العدد الأصلي بمقدار 63 فما هو العدد؟

نفرض ان مرتبة الاحاد هي x

نفرض ان مرتبة العشرات هي y

العدد قبل التغيير = $x+10y$ [العدد الاصلي]

العدد بعد التغيير=$y+10x$ [أستبدلنا احاده بعشراته حصلنا على عدد يقل عن الاصلي]

$$x+y=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x+10y-(y+10x)=63$$

$$x+10y-y-10x=63$$

$9y - 9x = 63$] $(\div 9)$

$y - x = 7$ ..... (2)

$x + y = 9$ ..... (1)

$-x + y = 7$ ..... (2)

2y=16 ⟹ y=8

X+8=9

X=9-8=1

S={1, 8}

$ax^2 + bx + c = 0$
المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد

01 طريقة التحليل

مثال (10) : جد مجموعة حل المعادلات ، مستخدما طريقة التحليل الى العوامل :.

a) $x^2 + 5x = -6$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ اولا نرتب المعادلة

$(x + 3)(x + 2) = 0$ التحليل بالتجربة

اما $x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

او $x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

$s = \{-3, -2\}$

b) $3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$ التحليل باستخدام الفرق بين مربعين

أما $x = 0$

او $3x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{3}$

$$s = \left\{0, \frac{5}{3}\right\}$$

c) $9x^2 = 16$

$9x^2 - 16 = 0$

$(3x - 4)(3x + 4) = 0$

اولاً نرتب المعادلة
نحلل بالفرق بين مربعين

اما $3x - 4 = 0$

$3x = 4 \longrightarrow x = \frac{4}{3}$

او $3x + 4 = 0$

$3x = -4 \longrightarrow x = \frac{-4}{3}$

$s = \{\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\}$

02 طريقة اكمال المربع

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية بالمربع الكامل كالآتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$

2) اذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a

3) نضيف الى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) أي أن : $\left(\frac{1}{2}\ b\right)^2$

4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعا كاملا ونبسط الطرف الأيمن .

5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x

مثال (11): جد مجموعة حل المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$ بطريقة اكمال المربع

$x^2 + 4x = 5$

$\left(\frac{1}{2} \times 4\right)^2 = (2)^4 = 4$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$

$(x + 2)^2 = 9$ بأخذ الجذر التربيعي الطرفين

$x + 2 = \pm 3$

أما $x + 2 = 3 \implies x = 3 - 2 = 1$

أو $x + 2 = -3 \implies x = -3 - 2 = -5$

$S = \{1, -5\}$

03 طريقة الدستور

يمكن حل المعادلة $ax^2+bx+c=0 \ , \ a\neq 0$ باستخدام القانون العام

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) : $ax^2+bx+c=0$

2) نكتب قيم المعاملات : a معامل x^2 ، b معامل x مع اشارته ، c الحد المطلق مع اشارته .

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير .

مثال (12):. جد مجموعة حل المعادلة $x^2+2x-4=0$

$a=1 \ , \ b=2 \ , \ c=-4$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$x=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}$$

أما $x=-1+\sqrt{5}$

أو $x=-1-\sqrt{5}$

$S=\{-1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5}\}$

مثال (13) :. جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ بطريقة الدستور

$a = 1 \qquad b = -10 \qquad c = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$$

نلاحظ هنا اننا نكتب مجموعة الحل كما يأتي : $s = \{5\}$ نظراً لكون العامل المميز $b^2 - 4ac$ يساوي صفراً مما يعني ان للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين .

مثال(14) : بين ان للمعادلة $x^2 - 2x + 5 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية R

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 5$

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

$$\triangle = (-2)^2 - 4(1)5$$

$$\triangle = 4 - 20 = -16$$

وبما ان المميز عدد سالب فأنه ليس للمعادلة حل في مجموعة الاعداد الحقيقية R

ايجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

لإيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها نستخدم القانون الاتي :.

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين}).x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثال (15):. كون معادلة تربيعية جذريها العددين $-3, 2$:

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين}).x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$$x^2 - (-3 + 2)x + (-3 \times 2) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

مجموع الجذرين $= \frac{-b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{c}{a}$

مثال (16):. جد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 4x + 3$ وتحقق من صحة الحل مستخدماً المعلومات الواردة في الملاحظة اعلاه .

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

اما $x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

او $x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$$s = \{1, 3\}$$

التحقق :.

مجموع الجذرين (3+1=4) , $\frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$

حاصل ضرب الجذرين $(3 \times 1 = 3)$, $\frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

مثال(17):.اذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + kx - 15 = 0$ يساوي 3 فما هو الجذر الاخر وما قيمة k ؟

نفرض ان الجذر المجهول هو h فيكون حاصل ضرب الجذرين هو (3.h) وبالمقارنة مع الصيغة القياسية

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين}).x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$3h = -15 \longrightarrow h = \frac{-15}{3} = -5$ وهي قيمة الجذر الثاني

مجموع الجذرين $3 + (-5) = -2$

بالمقارنة مع الصيغة أعلاه نتوصل الى أن

$k = 2$ $\quad -k = -2$

تمارين (1-2)

1. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة التحليل:

$a)\ 6x^2+7x-3=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4(6)(-3)}}{2(6)}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{12}=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{12}=\frac{-7\pm11}{12}$$

أما $x=\frac{-7+11}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

أو $x=\frac{-7-11}{12}=\frac{-18}{12}=-\frac{3}{2}$

$S=\{\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\}$

$b)\ x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

اما $X+4=0 \Rightarrow x=-4$

او $x-1=0 \Rightarrow x=1$

s={-4,1}

$c)\ x^2+12=7x$

$x^2-7x+12=0$

$(x-4)(x-3)=0$

اما $x=4 \Rightarrow X-4=0$

او $X-3=0 \Rightarrow x=3$

s={4,3}

$d)\ 16 = x^2 - 6x$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x-8)(x+2)=0$

اما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

او $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

s={8,-2}

$e)\ 3x^2 = 9x$

$3x^2 - 9x = 0$

$3x(x - 3) = 0$

اما $3x=0 \Rightarrow x=0$

او $x-3=0 \Rightarrow x=3$

s={0,3}

$f)\ (2x - 3)(x - 1) = 15$

$= 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 15$

$= 2x^2 - 5x + 3 - 15 = 0$

$= 2x^2 - 5x - 12 = 0$

$= (2x + 3)(x - 4) = 0$

$2x + 3 = 0$

$2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$s=\{\frac{-3}{2}, 4\}$

$g)\ x-\sqrt{x}-12=0, \sqrt{x}>0, x\geq 0$

$(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+3)=0$

أما $\sqrt{x}-4=0 \Rightarrow \sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$

او $\sqrt{x}+3=0 \Rightarrow \sqrt{x}=-3 \Rightarrow x=9$

S={16,9}

2. جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة اكمال المربع

$a)\ x^2-7x-8=0$

$\left(7\times\frac{1}{2}\right)^2=$
$=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$

$x^2-7x+\frac{49}{4}=8+\frac{49}{4}$

$(x-\frac{7}{2})^2=\frac{81}{4}$ بالجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{9}{2}$

$x=\pm\frac{9}{2}+\frac{7}{2}$

اما $x=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}=\frac{16}{2}=9$

او $x=\frac{-9}{2}+\frac{7}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

$(13x\frac{1}{2})^2=(\frac{13}{2})^2$
$=\frac{169}{4}$

S={9,-1}

$b)\ 42+x^2=13x$

$x^2-13x=-42$

$x^2-13x+\frac{169}{4}=-42+\frac{169}{4}$

$(x-\frac{13}{2})^2=1$

$X - \frac{13}{2} = \pm 1$

$x = \pm 1 + \frac{13}{2}$

اما $x = 1 + \frac{13}{2} = \frac{15}{2}$

او $x = -1 + \frac{13}{2} = \frac{11}{2}$

$S = \{\frac{15}{2}, \frac{11}{2}\}$

c) $6x^2 = 6 - 5x$

$6x^2 + 5x = 6$ نقسم على 6

$x^2 + \frac{5x}{6} + \frac{25}{144} = 1 + \frac{25}{144}$

$(\frac{5}{6} \times \frac{1}{2})^2 = (\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$

$\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$

$x + \frac{5}{12} = \frac{13}{12}$

$x = \frac{13}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5}{12}$

d) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

$3x^2 + 4x = 4$ نقسم على (3)

$x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}$

$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}$

$= \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= \frac{4}{9}$

$(x + \frac{2}{3})^3 = \frac{12 + 4}{9}$

$x + \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$

$x + \frac{2}{3} = \pm \frac{4}{3}$

3 . جد مجموعة حل المعادلات الآتية مستخدماً طريقة الدستور:

$a)\ 3x^2 - 6x = -2$

$3x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad a = 3 \qquad b = -6 \qquad c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3 \pm 2\sqrt{3})}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$s = \{\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}\}$$

$b)\ x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad a=1 \qquad b=-4 \qquad c=3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(-4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-8} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{-8} = \frac{4 \pm 2}{-8}$$

اما $x = \frac{4+2}{-8} = \frac{6}{-8} = \frac{3}{-4}$

او $X = \frac{4-2}{-8} = \frac{2}{-8} = \frac{1}{-4}$

$S = \{\frac{3}{-4}, \frac{1}{-4}\}$

c) $4x^2 = 12x - 9$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

A=4 b=-12 c=9

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{-12 \pm 0}{8} = \frac{-3}{2}$$

$$s = \{\frac{-3}{2}\}$$

d) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

A=3 b=-7 c=2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

اما $x = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

او $x = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

S={2, $\frac{1}{3}$}

$e)\ (x+5)^2+2=38$

$x^2+5x+5x+25+2=38$

$x^2+10x+27=38$

$x^2+10x+27-38=0$

$x^2+10x-11=0$

a=1 b=10 c=-11

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(10)\pm\sqrt{(10)^2-4(1)(-11)}}{2(10)}$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100+44}}{20}=\frac{-10\pm\sqrt{144}}{20}=\frac{-10\pm12}{20}$$

اما $x=\frac{-10+12}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

او $x=\frac{-10-12}{20}=\frac{-22}{20}=\frac{-11}{10}$ $\quad S=\{\frac{1}{10},\frac{-11}{10}\}$

4) كون المعادلة التربيعية التي جذريها $1-\sqrt{3}\ ,\ 1+\sqrt{3}$

مجموع الجذرين $1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$

حاصل ضرب الجذرين $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=$

$=1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3=-2$

المعادلة التربيعية $x^2-2x-2=0$

5) كون المعادلة التربيعية التي جذريها $2-3\sqrt{2}\ ,\ 1+5\sqrt{2}$

مجموع الجذرين $=(1+5\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$

حاصل ضرب الجذرين $(2-3\sqrt{2})(1+5\sqrt{2})=$

$=2+10\sqrt{2}-3\sqrt{2}-15(2)$

$=2+7\sqrt{2}-30$

$=-28+7\sqrt{2}$

المعادلة التربيعية $x^2-(3+2\sqrt{2})x+(-28+7\sqrt{2})=0$

6)جد قيمة k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k-2).x+9=0$ متساويين.

a=1 b=-(k-2) c= 9

$\Delta= b^2-4ac$

$\Delta= [-(k-2)]^2-4(1)(9)$

$\Delta= (k-2)^2-36$ نحلل بالفرق بين مربعين

[(k-2)+6] [(k-2)-6]=0

[k+4][k-8]=0

اما k+4=0 ⇒ k=-4

او k-8=0 ⇒ k=8

7) صفيحة معدنية مربعة الشكل تستخدم في قسم الميكانيك فإذا قطع من طول ضلعها بمقدار $(15\ cm)$ وتناقصت مساحتها بمقدار $(255\ cm^2)$. جد طول ضلعها.

طول ضلع الصفيحة هو $x-15$

$x^2-(x-15)^2=255$

$x^2-(x^2-30x+225)-255=0$

$x^2-x^2+30x-225-255=0$

$30x-480=0$

$30x=480$

$X=\frac{480}{3}=16$

8. في مدخل بناية إعدادية صناعية توجد قطعةارض مربعة الشكل طول ضلعها (20m) ماعرض الشريط اللازم زراعته في محيطها لتصبح نصف مساحتها مزروعة؟

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}x400 = 200m^2$$

$$400 - (20 - 2x)^2 = 200$$

$$\frac{1}{2}$$

$$400 - (400 - 80x + 4x^2) = 200$$

$$400 - 400 + 80x - 44x^2 = 200$$

$$4x^2 - 80x + 200 = 0 \qquad \div 4$$

$$x^2 - 20x + 50 = 0$$

$$A = 20^2 = 400m^2$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A=1 b=-20 c=50

$$X = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(50)}}{2(1)}$$

$$X = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 200}}{2}$$

$$X = \frac{20 \pm \sqrt{200}}{2}$$

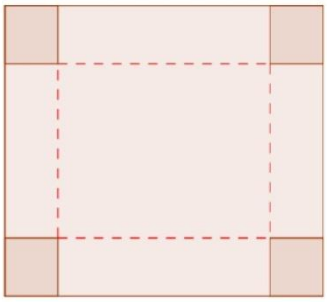
$$X = \frac{20 \pm 10\sqrt{2}}{2}$$

$$X = \frac{20}{2} \pm \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$X = 10 \pm 5\sqrt{2}$$

9. في المعرض العلمي السنوي للتعليم المهني يراد صنع صندوق لعرض المنتوجات قاعدته مربعة ومفتوح من الأعلى باستخدام قطعة من الكرتون الملون مربعة الشكل بأسلوب قطع مربعات متساوية المساحة من أركانها الأربعة طول ضلع كل منها $3cm$ وثني الاجزاء البارزة (كما في الشكل المجاور) فإذا كان حجم الصندوق المطلوب $(768cm^3)$ فما طول ضلع قطعة الكرتون الملونة؟

الحجم = الارتفاع × مساحة القاعدة



$$768 = (x-6)^2 \times 3$$

نقسم على 3

$$(x-6)^2 = 256$$

بجذر الطرفين

$$x - 6 = 16$$

$$x = 16 + 6$$

$$x = 22\text{cm}$$

الفترات الحقيقية

الفترة (Interval) : هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty , +\infty)$
ويمكن تصنيفها كالاتي:

الفترات المحددة بين نقطتين حقيقيتين a, b عندما $a < b$ وتكون بثلاث صيغ هي:

1) الفترة المفتوحة (a, b) (Open Interval)

وتعرّف بانها $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



حيث $a \notin (a, b)$، $b \notin (a, b)$ أي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a, b
دون أن يكون هذين العددين من ضمنها.

2) الفترة المغلقة $[a, b]$ (Closed Interval) وتعرف بانها :

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم ادناه



حيث $a \in [a, b], b \in [a, b]$ أي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a , b
وبضمنها هذين العددين a, b

3) الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة وهي بصيغتين

- مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين وتعرّف كما يأتي $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

وتمثل بيانيا على خط الاعداد كما في الرسم ادناه



حيث $a \in [a, b), b \notin [a, b)$ أي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a , b وبضمنها العدد a فقط.

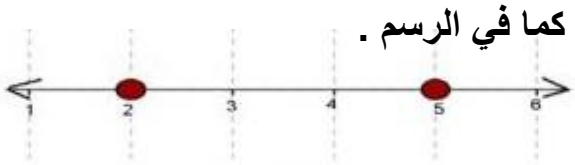
- مغلقة من اليمين ومفتوحة من اليسار وتعرّف كما يأتي: $(a, b] = \{x \; a < x \leq b\}$

وتمثل بيانيا على خط الاعداد كما في الرسم ادناه:

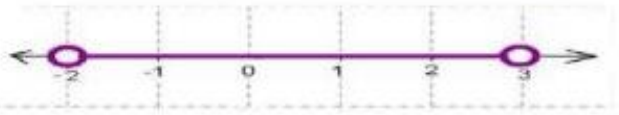


حيث $a \notin (a, b], b \in (a, b]$ اي أنها مجموعة كل الاعداد الواقعة بين العددين a، b
وبضمنها العدد b فقط.

امثلة : لاحظ الفترة المغلقة $[2,5]$ وهي مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $2 \leq x \leq 5$ وتمثل على خط الاعداد كما في الرسم .



لاحظ الفترة المفتوحة $(-2,3)$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $-2 < x < 3$ وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم .



لاحظ الفترة نصف المفتوحة $(3,5]$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $3 < x \leq 5$ وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



لاحظ الفترة نصف المغلقة $[2,6)$ وهي تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $2 \leq x < 6$ وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



مجموعات عددية غير محددة وتكون بأربع صيغ هي:

a) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a أو تساويه وتعرف كما يأتي:

$$\{x : x \in R, x \geq a\} = [a, \infty)$$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



b) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه وتعرف كمايأتي:

$$\{x : x \in R, x > a\} = (0, \infty)$$

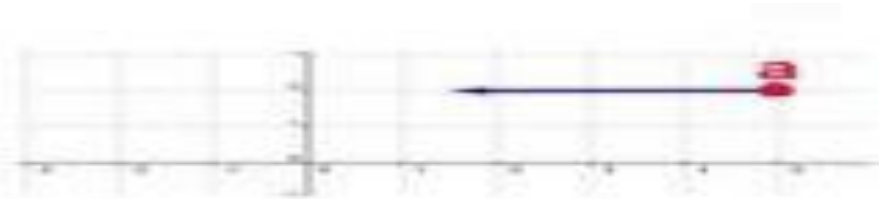
وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



c) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a او تساويه وتعرف كما يأتي

$$\{x: x \in R \ , \quad x \leq a\} = (-\infty, a)$$

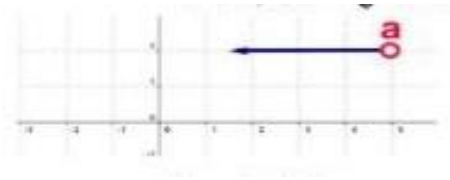
وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم



d) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تقل عن قيمة العدد الحقيقي a ولا تساويه وتعرف كما يأتي

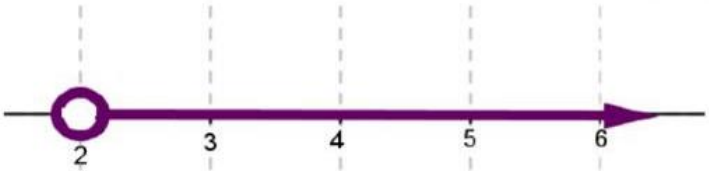
$$\{x: x \in R \ , \quad x < a\} = (-\infty, a)$$

وتمثل بيانياً على خط الاعداد كما في الرسم

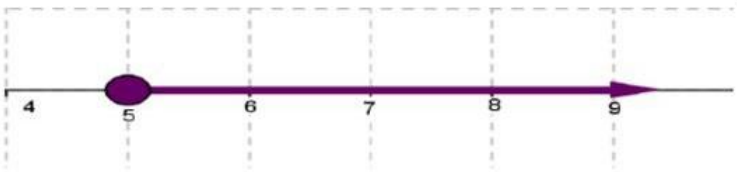


امثلة:

- ان مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x > 2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند الاحداثي $x = 2$ كما في الرسم :



- أن مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x \geq 5$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند الاحداثي $x = 5$ كما في الرسم :



- ان مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x = -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة عند الاحداثي

$x = -2$ كما في الرسم :



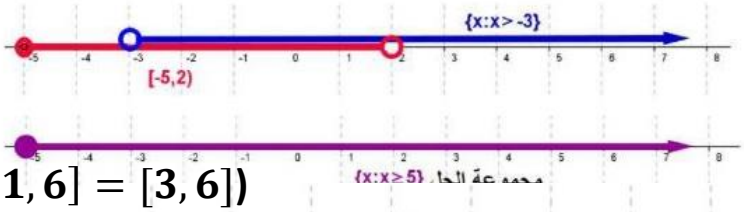
- ان مجموعة الاعداد الحقيقية x حيث $x \leq -2$ يمكن أن يمثلها شعاع بدايته فجوة مملوءة عند النقطة $x = -2$ كما في الرسم :



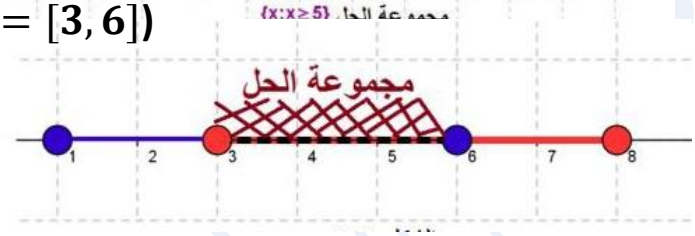
مثال (18):. مثل على خط الاعداد كلا مما يأتي :

a) $\{x: x > -3\} \cup [-5, 2)$

$\{x: x > -3\} \cup [-5, 2) = \{x: x \geq -5\}$



b) $[3, 8] \cap [1, 6] = [3, 6]$)



القيمة المطلقة للعدد الحقيقي

(The Absolute Value of The Real Number)

تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x : هي عدد حقيقي له قيمة العدد x نفسها عندما يكون موجباً أو صفراً، فيما تساوي (عندما يكون سالباً، ويرمز لمطلق العدد x بالرمز $|x|$ أي أن :

$$|x| = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

اي أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي دائماً عدد غير سالب كما يتضح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (19):. لاحظ الامثلة العددية الآتية: -

1) $|5| = 5$ 2) $|-5| = 5$ 3) $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ 4) $|3 - 2| = |2 - 3| = 1$

مثال(20):.عبرباستعمال تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن المقدار الجبري

$|x-3|, x \in R$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall(x-3) \geq 0 \\ -x+3 & \forall(x-3) < 0 \end{cases} \rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \forall(x) \geq 3 \\ -x+3 & \forall(x) < 3 \end{cases}$$

نستنتج من البند (2-4) أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x لها الخواص الآتية:

اي أن القيمة المطلقة غير سالبة دائماً

1) $\forall x \in R\ ;\ |x| \geq 0$
2) $\forall x \in R\ ;\ |x| = |-x|$
3) $\forall x \in R\ ; -|x| \leq x \leq |x|$
4) $\forall x \in R\ ;\ x^2 = |x|^2$
5) $\forall x, y \in R\ ;\ |x.y| \geq |x|.|y|\ ,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ ,\ y \neq 0$
6) $\forall x, y \in R\ ;\ |x-y| \geq \big||x|-|y|\big| \geq \big||x|-|y|\big|$
7) $\forall x \in R\ ;\ |x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq +a$
8) $\forall x, y \in R\ ;\ |x+y| \leq |x|+|y|\ ,\ |x|+|y|$
9) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

حل بعض المعادلات التي تحتوي قيمة مطلقة

(Solving Some Equations Containing Absolute Value)

مثال (21) :جد مجموعة حل المعادلة : $|x-2| = 4$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \forall x \geq 2 \\ -(x-2) & \forall x < 2 \end{cases}$$

1) عندما $x \geq 2$ فأن :

$x-2=4 \quad \rightarrow x=6$

2) عندما $x <$ فأن :

$-(x-2)=4 \rightarrow x-2=-4$
$\rightarrow x=-4+2 \rightarrow x=-2$
$\therefore S.s = \{-2, 6\}$

مثال(22):. جد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - |x| = 12$

1) عندما $(x \geq 0)$ فأن $|x| = x$ ولذلك تكون المعادلة كالاتي :

$$x^2 - x = 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

اما: $(x-4) = 0 \rightarrow \ x = 4 \ \ (x \geq 0)$ تحقق العلاقة

او : $(x+3) = 0 \rightarrow \ x = -3 \ \ (x \geq 0)$ تهمل لأنها لا تحقق العلاقة

2) عندما $(x < 0)$ فأن $|x| = -x$ ولذلك تكون المعادلة كالاتي :

$$x^2 - x = 12$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

اما : $(x+4) = 0 \rightarrow \ x = -4 \ \ (x < 0)$ تحقق العلاقة

او : $(x-3) = 0 \rightarrow x = 3 \ \ (x < 0)$ تهمل لأنها لا تحقق العلاقة

$$\therefore S.s = \{-4, +4\}$$

تمرين 3-1

1)اكتب خمسة عناصر تنتمي الى كل من الفترات الاتية :.

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), [0,1], (1,2], [5,7), (3,4), (-10,-6], \left(-1, \frac{1}{2}\right]$$

$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\}$

$\left(-1, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \{0, 1, \frac{1}{3}\}$

$(-10,-6] \longrightarrow \{-6, -7, -8, \ldots..\}$

2) باستعمال تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي جد قيمة ما يأتي :

$$|\sqrt{3}-5| \ , \quad |-\sqrt{20}| \ , \quad \left|\frac{3}{-4}\right| \ , \quad |-11|$$

$$|\sqrt{3}-5| \longrightarrow -(\sqrt{3}-5) \longrightarrow -\sqrt{3}+5$$

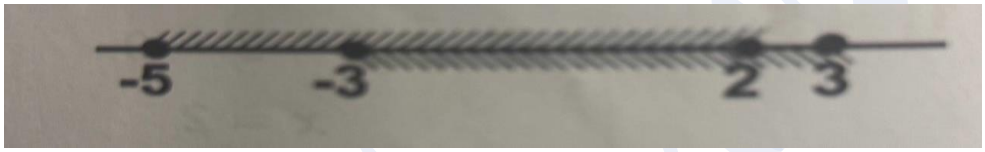
$$|-\sqrt{20}| \longrightarrow \sqrt{20}$$

$$\left|\frac{3}{-4}\right| \longrightarrow \frac{3}{4}$$

$$|-11| \longrightarrow 11$$

3) لتكن $A=[-5,2], B=[-3,3]$. جد ناتج ما يأتي $A \cup B$ ، $A \cap B$ على شكل فترات حقيقية ومثلها على خط الاعداد الحقيقية.

$$A \cup B = \{-5,3\}$$
$$A \cap B = \{-3,2\}$$



4) جد ناتج كلاً مما يأتي :

a) $\{x: x \geq -1\} \cap [-3,2)$

[-1,2)

b) $(-3,1] \cap \{x: x > 2\}$

$\emptyset$

c) $(-2,3) \cup \{x: x \leq 1\}$

$\{x: x < 3\}$

d) $[-7,0] \cap (-2,3)$

(-2,0}

5) حل المعادلات الآتية في مجموعة الاعداد الحقيقية .

a) $\left|\frac{x}{2}-1\right|=5$

$\frac{x}{2}-1=0\ ]\ (2)$

$x-2=0$

$x=2$

$s_1: x \geq 2$

$\frac{x}{2}-1=5(2)$

$x-2=10$

$x=8$

$s_2: x<2$

$\frac{x}{2}-1=-5\ ]\ (2)$

$x-2=-10$

$x=-8$

S={8,-8}

b) $|x^2-4|=|2x-4|$

$S_1: R/(-2,2)$

$x^2-4=2x-4$

$x^2-2x=0$

X(x-2)=0

اما x=2

او x=0

$S_2: x \in /(-2,2)$

$x^2-4=2x-4$

$x=2$

S={2}

c) $x^2-30=|x|$

$s_1: x \geq 0$

$x^2-30=x$

$x^2-x-30=0$

$(x-6)(x+5)=0$

اما $x=6$ او $x=-5$ يهمل

S={6,-6}

$s_2: x<0$

$x^2+x-30=0$

$(x+6)(x-5)=0$

$x=-6$ او $x=5$

$d)|x^2+5|=9 \quad x^2 \neq -5$

$x^2+5=9$

$x^2=9-5$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$s=\{-2,2\}$

المتباينات (المتراجحات) (Inequalities)

مثال / أثبت صحة المتباينة الاتية : $\frac{5}{11} > -\frac{3}{7}$

الحل : $\frac{5}{11}-\frac{-3}{7}=\frac{35+33}{77}=\frac{88}{77}>0$

ولكون ناتج الطرح موجب فأن العبارة صائبة

خواص المتباينات (المتراجحات)

سنحاول في هذا البند تقديم بعض خواص التباين التي يتيح تطبيقها حل كل أنواع المتباينات:

1) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$
2) $a>b \Leftrightarrow a\times c>b\times c \ : c>0$
3) $a>b \Leftrightarrow a\times c>b\times c \ : c<0$
4) $a>b, b>c \rightarrow a>c$
5) $a>b, c>d \rightarrow a+c>b+d$
6) $a>b \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ مختلفان في الاشارة a,b

   $a>b \rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ متفقان في الاشارة a,b
7) $a>b \rightarrow \frac{1}{a}>0, a<0 \rightarrow \frac{1}{a}<0$

حل المتباينات (المتراجحات)

1) حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الاولى بمتغير واحد

مثال(24):جد مجموعة حل المتباينة $3-2x\leq 5$ مثل مجموعة الحل على خط الأعداد

$3-2x\leq 5$

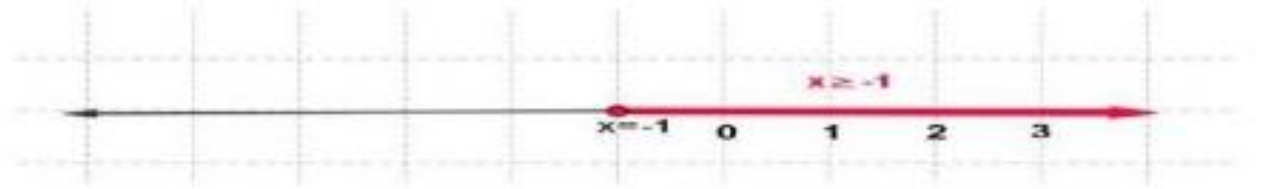
بإضافة العدد (-3) الى طرفي المتباينة نحصل على:

$$(-3)=3-2x\leq(-3)+5\rightarrow -2x\leq 2$$

بضرب طرفي المتباينة بالعدد $-\frac{1}{2}$ نحصل على: $x\geq -1$

$$S.S=\{x\in R: x\geq -1\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما مبين بالرسم



مثال (25): جد مجموعة حل المتباينة $-2\leq 2x-3\leq 4$ ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد

$$-2\leq 2x-3\leq 4$$

بإضافة العدد 3 إلى المتباينة نحصل على:

$$-2+3\leq 2x-3+3\leq 4+3$$

$$1\leq 2x\leq 7$$ اي

وبضرب المتباينة بالعدد $\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{7}{2}$$

$$S.s=\left\{x\in R:\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{7}{2}\right\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما مبين بالرسم



مثال (26): جد مجموعة حل المتباينة $|2-6x| \leq 8$ ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد

$$|2-6x| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-6x \leq 8 & \forall x \leq \frac{1}{3} \\ -(2-6x) \leq 8 & \forall x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

1) $2-6x \leq 8 \rightarrow -6x \leq 6 \rightarrow x \geq -1$

وفي الوقت نفسه لدينا $x \leq \frac{1}{3}$

2) $-(2-6x) \leq 8 \rightarrow -2+6x \leq 8 \rightarrow 6x \leq 10 \rightarrow x \leq \frac{5}{3}$

وفي الوقت نفسه لدينا $x > \frac{1}{3}$

$$Ss = \left\{x: x \in \left[-\frac{1,1}{3}\right]\right\} \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right] = \left\{x \in R: -1 \leq x \leq \frac{5}{3}\right\}$$

ويكون التمثيل البياني لمجموعة الحل كما في الشكل:



مثال(27): جد مجموعة حل المتباينة $-3 \leq |x-1| < 6$ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد:

$$-3 \leq |x-1| < 6 = \begin{cases} -3 \leq (x-1) < 6 & \forall x \geq 1 \\ -3 \leq -(x-1) < 6 & \forall x < 1 \end{cases}$$

1) $-3 \leq (x-1) < 6 \rightarrow -3+1 \leq x-1+1 < 6+1$

$-2 \leq x < 7 \quad , \quad x \geq 1$ وفي الوقت نفسه

$$S.s_1 = \{x \in R: -2 \leq x < 7\} = [-2, 7)$$

2) $-3 \leq -(x-1) < 6 \rightarrow \ -3 \leq -x+1 < 6$

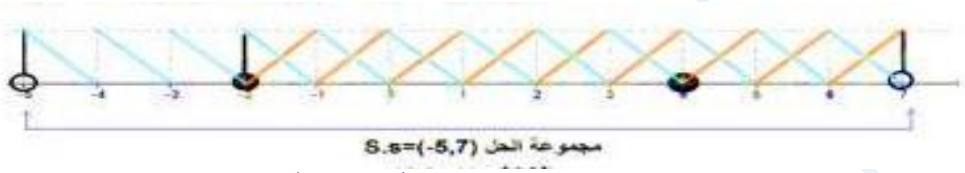
$-3 - 1 \leq -x + 1 < 6 - 1$

$-4 \leq -x < 5 \ \rightarrow 4 \geq x > -5$

$-5 < x \leq 4 \quad , \ x < 1$ وفي الوقت نفسه

$$Ss_2 = \{x \in R: -5 < X \leq 4\} = (-5, 4]$$

$$Ss = [-2, 7) \cup (-5, 4] \rightarrow \therefore Ss = (-5, 7)$$



2) حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الثانية بمتغير واحد بالصورة

$x^2 \geq a^2$ او $x^3 \leq a^2$

مبرهنة إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً

1) مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة المغلقة $[a, +a]$

2) مجموعة حل المتباينة $x^2 < a^2$ هي الفترة المفتوحة $(-a, +a)$

نتيجة // إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فأن:

1. مجموعة حل المتباينة $^2 \geq a^2$ هي الفترة المغلقة $R/(-a, +a)$

2. مجموعة حل المتباينة $^2 > a^2$ هي الفترة المغلقة $R/[-a, +a]$

مثال (28):

(a) جد مجموعة حل المتباينة $^2 \leq 16$

الحل: حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 \leq a^2$ فان مجموعة حلها هي $[-a, +a]$

$$S.s[-4, +4]$$

(b) جد مجموعة حل المتباينة $^2 - 25 < 0$

$$x^2 - 25 < 0 \rightarrow \ x^2 < 25$$

حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 \leq a^2$ فان مجموعة حلها هي $(-a, +a)$

$$.S.s = (-5, +5)$$

(c) جد مجموعة حل المتباينة $2x^2 > 18$

$$x^2 > \frac{18}{2} \rightarrow x^2 > 9$$

حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 > a^2$ فان مجموعة حلها هي $R/(-a, +a)$

$$S.s = R/[-3, +3]$$

(d) جد مجموعة حل المتباينة $^2 \geq 3$

الحل / حيث ان المتباينة بالشكل $x^2 \geq a^2$ فان مجموعة حلها هي $R/[-a, a]$

$$Ss = \frac{R}{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}}$$

تمرين (4-1)

1. جد مجموعة حلول كل من المتباينات الآتية:

$a) 2x + 8 \leq 0$

$2x \leq -8$

$x \leq -4$

$S = \{x: x \leq -4\}$

$b) 3(y - 1) + 5y \geq y + 2$

$3y - 3 + 5y \geq y + 2$

$8y - y \geq 2 + 3$

$7y \geq 5$

$y \geq \frac{5}{7}$

$S = \left\{y: y \geq \frac{5}{7}\right\}$

$c)\ \frac{3-z}{5} > 2z$

(5) $\frac{3-z}{5} > 2z$ (5)

$3 - z > 10z$

$3 > 10z + z$

$3 > 11z$

$\frac{3}{11} > z$

$S = \{x: x < \frac{3}{11}\}$

$d) 3x - 1 > 7 - x$

$3x + x > 7 + 1$

$4x > 8$

$x > 2$

$S = \{x: x > 2\}$

e) $2x^2 - 8 \leq 0$

$2x^2 \leq 8$

$x^2 \leq 4$

$x \leq \pm 2$

S={x: $x \leq \pm 2$}

$f) x^2 \geq 49$

$S = \{7, -7\}$

أ. سامح سلمان

$g) 3x^2 - 27 > 0$

$3x^2 = 27$

$x^2 = \frac{27}{3}$

$x = \pm 9$

S={9,-9}

a) $z^2 > 15$

b) $|x - 2| < 5$

c) $|4x + 1| \geq -15$

d) $7 > |2x + 5| \geq 5$

2. المثلث ABC ليس قائم الزاوية وفيه $AB = 5cm, BC = 7cm$ جد العددين الذين يقع بينهما طول الضلع الثالث AC

3. ما هو أكبر عدد صحيح سالب يمكن أضافته لحدي النسبة $\frac{-}{7}$ ليكون الناتج لا يزيد على $\frac{14}{17}$ ؟

4. عدد طبيعي قيمة خمسة أمثاله مطروحاً منها 3 محصورة بين العددين 12، 2 فما هو العدد؟

الاختبار الختامي
Final Test

1. جد مجموعة الحل للنظام المؤلف من المعادلتين الاتيتين في R تحليلياً وبيانياً

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 2y = 21$$

2. جد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الاتيتين في R

1) $0.05x + 0.2.5(30 - x) = 3.3$

2) $\frac{5x}{3} + \frac{4+x}{2} = \frac{x-2}{2} + 1$

3. جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية في R

(1) $2x^2 - 7 = 0$

(2) $2x^2 = 4x$

(3) $2x^2 = 7x - 3$

(4) $m^2 + m = 0$

(5) $y^2 = \frac{3}{2}(y + 1)$

(6) $\sqrt{5x - 6x} - x = 0$

(7) $\frac{7}{2-x} = \frac{10-4x}{x^2+3x+10}$

(8) $\frac{u-3}{2u-2} = \frac{1}{6} - \frac{1-u}{3u-3}$

(9) $|x - 2| = 2x - 7$

(10) $|x + 4| = 3x - 8$

4. جد مجموعة حل المتباينات الاتية في R ثم مثلهما على خط الاعداد:

(1) $3(2-x)-2 \leq 2x-1$

(2) $|y+9| < 9$

(3) $|3-2x| \leq 5$

(4) $\frac{x+3}{8} \leq 5 - \frac{2-x}{3}$

5. جد المعادلة التربيعية التي جذريها العددين □ , −□

6. إذا كان العدد 4 هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - kx + 24 = 0$ فما قيمة k وما هو الجذر الآخر؟

7. في تفاعل كيمياوي يراد ضبط درجة حرارة التفاعل (T) بحيث لا تزيد على $200^\circ C$ ولا تقل عن $10^\circ C$ عبر عن ذلك بصيغة الفترات ثم عبر عنه مرة أخرى بصيغة متباينة تحتوي القيمة المطلقة.

8. أراد طالب ان يصمم أطاراً للوحة فنية بوضع حواشي ملونة على ورقة كارتونية مستطيلة بطول 2cm على حوافها الأربعة فاذا كانت مساحة الورقة الكارتونية $480\ cm^2$ والمساحة المخصصة للكتابة $320cm^2$. جد ابعاد الورقة الكارتونية المستطيلة.

9. يستخدم رجل الواحاً خشبية متساوية في الطول طول كل منها $2\sqrt{2}m$ لتصميم احواض على شكل مثلث متساوي الساقين على طول جدار مبنى منزله (كما موضح في الشكل المجاور) يتم زراعتها بالزهور الموسمية ، فإذا كانت مساحة كل حوض مثلث هي $4m^2$ أحسب طول قاعدة المثلث.

